LEERBOEK

DER

BOLDRIEHOEKSMETING
(MET VRAAGSTUKKEN)

DOOR

J. J. C. WESTENDORP

TWEEDE DRUK

HERZIEN DOOR

J. N. VISSCHERS
LEERAAR AAN DE R.H.B.S. TE 's-HERTOGENBOSCH

ZUTPHEN — W. J. THIEME & CIE — 1922

VOORBERICHT.

Toen ik het plan opvatte, een leerboek der Boldriehoeksmeting te schrijven, bestond er in onze taal geen werk over dit onderwerp, dat meer bevatte dan de gewone schoolleerboeken. Ik meende, dat aan een uitgebreider boek eenige behoefte was.

Het eerste hoofdstuk is gewijd aan een zuiver meetkundige behandeling der figuren op den bol. Wie onderwijs in Stereometrie of Boldriehoeksmeting geeft, begrijpt volkomen de klacht van de examencommissie voor Wiskunde (1912):

„De Stereometrie der figuren op den bol bleek vrij algemeen verwaarloosd te zijn. In het teekenen der figuren openbaarde zich niet zelden groot gebrek aan oefening en gemis aan vermogen om zich de figuren in de ruimte voor te stellen."

Ook daarom is de definitie van den pooldriehoek zoo gesteld, dat het verband met den oorspronkelijken driehoek eenvoudiger was af te leiden. Wanneer eigenschappen van drievlakshoeken of viervlakken konden dienen, om andere van bolfiguren af te leiden, heb ik dat hulpmiddel niet versmaad. Overigens zijn bijna zonder uitzondering de eigenschappen rechtstreeks, zonder hulp van drievlakshoeken, bewezen.

Niet alle vraagstukken, die zuiver meetkundig kunnen bewezen worden, zijn aan het eind van hoofdstuk I geplaatst. Sommige waren daarvoor te moeilijk, andere moesten dienst doen als vooroefening voor een volgend vraagstuk.

De formules hebben slechts betrekking op Eulersche boldriehoeken. Zoogenaamde „ezelsbruggen", om formules als die van Delambre en Neper te onthouden, heb ik niet bijgevoegd. De ondervinding leerde mij, dat het nut er van twijfelachtig is. Voor het gemak van den lezer is daarom achter in het boek een lijst van de meest voorkomende formules toegevoegd.

Voor zoover ik weet, is de tweede eigenschap van § 150 nieuw. Ze is reeds gepubliceerd in „Mathesis", jaargang 1913.

J. J. C. WESTENDORP.

NIJMEGEN, Juni 1914.

BIJ DEN 2DEN DRUK.

Toen de uitgever mij verzocht van het voortreffelijke werk der boldriehoeksmeting van wijlen J. J. C. Westendorp den tweeden druk te verzorgen, heb ik met genoegen daaraan voldaan. Ik meende het oorspronkelijke karakter van het werk te moeten bewaren en bepaalde mij alleen tot het aanbrengen van kleine verbeteringen en het inlasschen van enkele nieuwe eigenschappen. Dit is geschied met behoud van de oude paragrafeering.

Nieuw zijn de §§ 14A, 16A, 16B, 21A, 24A, 24B, 24C, 25A, 25B, 27A en 198—209. Het aantal vraagstukken is nog met eenige vermeerderd, meest alle van eigen vinding.

Ofschoon de drukproeven met de uiterste zorg zijn nagezien, zijn toch nog enkele foutjes over het hoofd gezien. De gebruiker gelieve deze eerst te verbeteren voor hij met de studie van het geheel begint.

Errata.

Pag. 15 reg. 15 v. o. staat boog BPA, lees: boog BPA$'$.

„ 68 „ 7 v. b. verander $\dfrac{\sin b}{\operatorname{tg} a}$ in $\dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$.

„ 73 „ 12 v. o. verander $2\,AD \times AD \cos A$ in $2\,AE \times AD \cos A$.

„ 77 „ 9 v. o. staat in den teller $\sin(a - b)$ verander dat in $\sin(s - b)$.

„ 84 in de laatste formule van Delambre moet de tweede teller $\sin \frac{1}{2}(a - b)$ zijn.

„ 91 reg. 7 v. o. de noemer van de laatste breuk moet niet $2n$ maar $2N$ zijn.

Ik hoop, dat het boek ên in bruikbaarheid ên in wetenschappelijkheid iets heeft gewonnen.

'S-HERTOGENBOSCH, Oct. 1922. J. N. VISSCHERS.

I. EIGENSCHAPPEN VAN FIGUREN OP DEN BOL.

§ 1. **Bepalingen.** *Een* **bolvlak** *of* **bolopppervlak** *is een vlak, waarvan alle punten even ver van een vast punt zijn verwijderd; dit punt heet* **middelpunt.**

Een lichaam, begrensd door een bolvlak, heet **bol.**

Een rechte van het middelpunt naar een willekeurig punt van het bolopppervlak getrokken, heet **straal.**

De verbindingsrechte van twee punten van een bolopppervlak heet **koorde.** *Elke koorde door het middelpunt heet* **middellijn.** *De uiteinden van een middellijn heeten* **tegenpunten** *van den bol.*

§ 2. **Eigenschap. Een bolvlak en een plat vlak snijden elkaar volgens een cirkel.**

Bewijs.

Zij ABC een snijvlak van den bol (fig. 1). Laat uit het middelpunt M de loodlijn ME op het snijvlak neer, en verbindt een willekeurig punt B van de snijkromme met M en E. De driehoek MEB is rechthoekig in E, dus

$$EB = \sqrt{(MB^2 - ME^2)}.$$

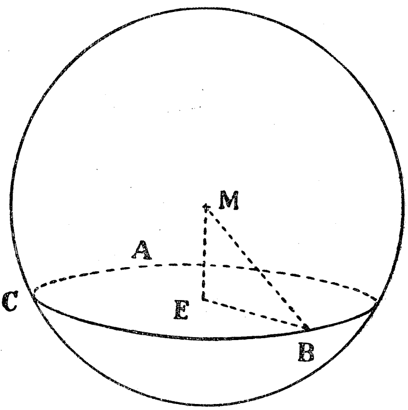


Fig. 1.

Nu zijn MB en ME constant, dus ook EB. Alle punten van de snijfiguur ABC liggen dus even ver van het punt E; het vlak snijdt den bol dus volgens een cirkel, waarvan E het middelpunt is.

Bepaling. *Een cirkel, waarvan het vlak gaat door het middelpunt van den bol, heet* **groote cirkel;** *andere cirkels op het bolopppervlak heeten* **kleine cirkels.**

Groote cirkels van een bol deelen elkaar steeds middendoor, omdat hun vlakken elkaar snijden volgens middellijnen. Omdat het vlak van een grooten cirkel door het middelpunt van den bol gaat, is een groote cirkel bepaald door twee punten op den bol. Door twee tegenpunten echter kan men oneindig veel groote cirkels brengen.

Een kleine cirkel is bepaald door drie punten op het bolvlak.

§ **3.** Een groote cirkel door twee punten A en B op een bolvlak, die geen tegenpunten zijn, wordt in twee deelen verdeeld: een boog AB grooter dan 180°, en een boog AB kleiner dan 180°. In 't vervolg beteekent **„boog AB"** of **„spherische afstand van A en B"** de boog van den grooten cirkel door A en B, die kleiner is dan 180°.

De spherische afstand van twee punten op een bol kan men aangeven in lengtematen, maar ook in graden, minuten en seconden. In de boldriehoeksmeting volgt men gewoonlijk de laatste manier.

§ **4.** **Bepalingen.** *De middellijn van een bol, die loodrecht staat op het vlak van een grooten of kleinen cirkel, heet de* **as** *van dien cirkel. De uiteinden van die middellijn noemt men de* **polen** *van dien cirkel.*

Eigenschap. De spherische afstanden van een pool van een cirkel tot de punten van den omtrek van dien cirkel zijn gelijk.

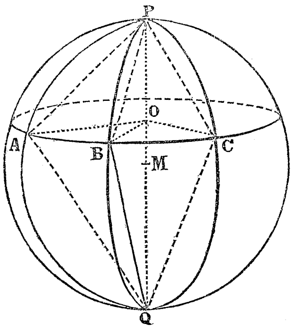


Fig. 2.

Bewijs.

Laat ABC een kleine cirkel zijn (fig. 2), PQ zijn as, die in O loodrecht op het vlak ABC staat. Uit de congruentie der driehoeken PAO, PBO, PCO volgt:

$$PA = PB = PC.$$

Maar dan zijn ook de bogen PA, PB en PC gelijk, en tevens de bogen QA, QB en QC.

Men noemt P het **spherisch middelpunt** *en boog PA de* **spherische straal** *van den cirkel ABC.*

Wanneer men spreekt van de pool van een kleinen cirkel, bedoelt men gewoonlijk die, welke het dichtst bij het vlak van den cirkel ligt.

§ **5.** De spherische afstand van een punt P tot de punten van den grooten cirkel, waarvan P een pool is, bedraagt 90°. Omgekeerd heeft men de

Eigenschap. Als een punt A van twee punten B en D, die geen tegenpunten zijn, spherisch 90° is verwijderd, dan is A een pool van den grooten cirkel door B en D.

Bewijs.

Zij in fig. 3 boog AB = boog AD = 90°, dan moet bewezen worden, dat A een pool is van den grooten cirkel door B en D. Uit de gegevens volgt, dat, als M het middelpunt van den bol is, ∠ AMB = ∠ AMD = 90°. AM staat dus loodrecht op het vlak van den grooten cirkel door B en D, en is daarom ~~een pool~~ de as van dien cirkel en dus A een pool.

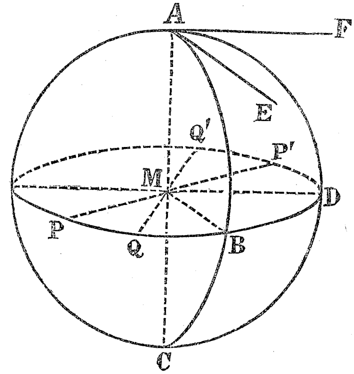


Fig. 3.

Opmerking. Als in fig. 3 P en Q polen zijn der groote cirkels ABC en ADC, dan is

boog AP = 90°,
boog AQ = 90°,

zoodat A een pool is van den grooten cirkel PQ. Men heeft dus de

Eigenschap. Als eenige groote cirkels door twee tegenpunten gaan, liggen de polen dier cirkels op den grooten cirkel, waarvan die tegenpunten de polen zijn.

§ 6. **Bepaling.** *Onder den hoek van twee elkaar snijdende kromme lijnen verstaat men den hoek gevormd door de raaklijnen in hun snijpunt.*

Eigenschap. De hoek van twee halve groote cirkels op een bol, wier uiteinden samenvallen, is gelijk aan

1e. **den standhoek van den tweevlakshoek, gevormd door de vlakken der groote cirkels.**

2e. **den verbindingsboog van de middens der halve cirkels.**

3e. **den spherischen afstand van hun polen.**

Bewijs.

Laten ABC en ADC (fig. 3) de halve groote cirkels zijn, die de uiteinden A en C gemeen hebben. Trekt men de stralen MB en MD in de vlakken der cirkels loodrecht op de middellijn AC, dan is ∠ BMD de standhoek van den bovenbedoelden tweevlakshoek.

De hoek, gevormd door de raaklijnen AE en AF in het snijpunt A, is de hoek der cirkels. Merkt men op, dat beide raaklijnen loodrecht op de middellijn AC staan, dan blijkt dat de beenen der hoeken BMD en EAF evenwijdig en in dezelfde richting loopen, zoodat ∠ BMD = ∠ EAF. Tevens blijkt, dat de boog BD van den grooten cirkel MBD gelijk is aan $\angle$ BMD, dus ook aan $\angle$ EAF. Trekt men de middellijnen PMP′ en QMQ′ respectievelijk loodrecht op de vlakken ABC en ADC, dan liggen de polen P en Q der cirkels ABC en ADC op den grooten cirkel BD. De beenen van $\angle$ PMQ staan loodrecht op die van $\angle$ BMD, waaruit volgt:

boog PQ $=$ $\angle$ PMQ $=$ $\angle$ BMD $=$ $\angle$ EAF, waarmede het onder 3^e gestelde bewezen is.

Opmerking. Ook P′ en Q′ zijn polen der cirkels ABC en ADC, waardoor men ook de bogen PQ′ en P′Q de spherische afstanden der polen kan noemen. Deze spherische afstanden zijn de supplementen van boog PQ.

§ **7.** Twee groote cirkels op een bol verdeelen het bolopperviak in vier deelen. Elk dezer deelen wordt begrensd door twee halve groote cirkels, wier uiteinden samenvallen.

Bepalingen. *Onder een* **boltweehoek** *verstaat men het gedeelte van een bolopperviak, dat door twee halve groote cirkels, wier uiteinden samenvallen, wordt begrensd. De halve cirkels heeten de* **zijden,** *de hoeken, die de cirkels in hun snijpunten vormen, de* **hoeken** *van den boltweehoek.*

Uit de stelling van § 6 volgt gemakkelijk de

Eigenschap. De hoeken van een boltweehoek zijn gelijk.

Wat betreft het oppervlak van een boltweehoek heeft men de

Eigenschap. Het oppervlak van een boltweehoek staat tot dat van den bol, als zijn hoek tot 360°.

Het bewijs van deze stelling kan gegeven worden op een wijze, overeenkomende met die van de eigenschap betreffende de verhouding der oppervlakken van twee rechthoeken met dezelfde basis.

Is de hoek van den boltweehoek $a°$, en de straal van den bol r, dan heeft men dus:

$$\text{Oppervlak boltweehoek} = \frac{a}{360} \times 4\pi r^2$$

§ **8. Bepaling.** *Een* **boldriehoek** *is een deel van een bolopperviak, dat begrensd wordt door drie bogen van groote cirkels.*

Een boldriehoek heeft drie **zijden** en drie **hoeken,** die ook **elementen** van den driehoek genoemd worden. De punten, waarin de zijden elkaar snijden, heeten **hoekpunten.**

Een hoek, gevormd door een zijde en het verlengde eener andere zijde, heet **buitenhoek.**

Opmerking. In verband met de afspraak van § 3 wordt elk der zijden van een boldriehoek kleiner dan 180° ondersteld.

Verbindt men het middelpunt van een bol met de hoekpunten van een op dien bol gelegen boldriehoek, dan ontstaat aan het middelpunt een drievlakshoek, waarvan de zes elementen, uitgedrukt in graden, minuten en seconden, gelijk zijn aan de elementen van den boldriehoek. De zijden van den drievlakshoek zijn gelijk aan de zijden van den boldriehoek, omdat middelpuntshoeken gelijk zijn aan de bogen, waarop ze staan, terwijl volgens § 6 ook de hoeken van drievlakshoek en boldriehoek twee aan twee gelijk zijn. Deze overeenstemming stelt ons in staat, eigenschappen van drievlakshoeken om te zetten in eigenschappen van boldriehoeken. Men heeft dus:

De som der zijden van een boldriehoek is grooter dan 0° en kleiner dan 360°.

De som der hoeken van een boldriehoek is grooter dan 180° en kleiner dan 540°.

Een zijde van een boldriehoek is kleiner dan de som, maar grooter dan het verschil der beide andere zijden.

Een buitenhoek van een boldriehoek is kleiner dan de som, maar grooter dan het verschil der niet-aanliggende binnenhoeken.

Als twee zijden van een boldriehoek gelijk zijn, zijn de hoeken tegenover die zijden ook gelijk, en omgekeerd.

Als twee zijden van een boldriehoek ongelijk zijn, staat tegenover de grootste der twee zijden een grootere hoek dan tegenover de kleinste, en omgekeerd.

Bepalingen. Gelijkbeenig *heet een boldriehoek, als twee zijden gelijk zijn;* **gelijkzijdig,** *als de drie zijden gelijk zijn. Is een der hoeken recht, dan spreekt men van een* **rechthoekigen** *driehoek,* **Rechtzijdig** *heet een boldriehoek, als een der zijden een kwadrant is.*

§ **9.** Men kan uit een gegeven boldriehoek andere driehoeken afleiden, wier elementen op eenvoudige wijze samenhangen met die van den oorspronkelijken.

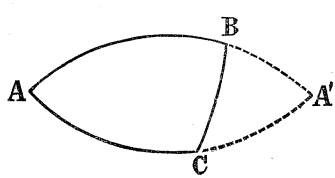


Fig. 4.

1. Verlengt men b.v. (fig. 4) de zijden AB en AC tot ze elkaar in het tegenpunt A′ van A snijden, dan ontstaat een driehoek A′BC, waarvan $\angle A' = \angle A$.

Verder is
$$\angle A'BC + \angle ABC = 180°.$$
$$\angle A'CB + \angle ACB = 180°.$$

Eveneens zijn de zijden AB en A'B, AC en A'C elkaars supplement.

Men noemt △ A'BC *een* **nevendriehoek** *van* △ ABC. *Elke boldriehoek heeft drie nevendriehoeken.*

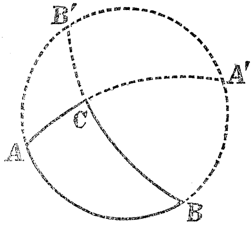


Fig. 5.

2. Verlengt men de zijden AC en BC tot in de tegenpunten A' en B' (fig. 5), dan ontstaat een △ A'B'C, die een **topdriehoek** van △ ABC is.

Vergelijking der elementen van oorspronkelijken driehoek en topdriehoek leert, dat twee paar zijden elkaars supplement zijn, en een paar zijden gelijk is. Hetzelfde geldt voor de hoeken.

Elke boldriehoek heeft drie topdriehoeken.

3. Bepaalt men de tegenpunten A', B' en C' der hoekpunten A, B en C van een boldriehoek, dan heet A'B'C' de **tegendriehoek** van △ ABC (fig. 6.)

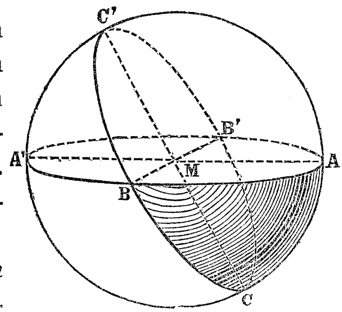


Fig. 6.

Van de drievlakshoeken M ABC en M A'B'C' is bekend, dat de elementen twee aan twee gelijk zijn, maar in tegengestelde volgorde voorkomen, zoodat ze elkaar niet kunnen bedekken. Hetzelfde geldt dus voor een boldriehoek en zijn tegendriehoek.

Een gelijkbeenige boldriehoek kan echter wel samenvallen met zijn tegendriehoek.

Men noemt boldriehoeken, wier elementen twee aan twee gelijk zijn, maar waarin die elementen in tegengestelde volgorde voorkomen, **symmetrisch.** Uit het bovenstaande volgt dus: *Een boldriehoek en zijn tegendriehoek zijn symmetrisch.*

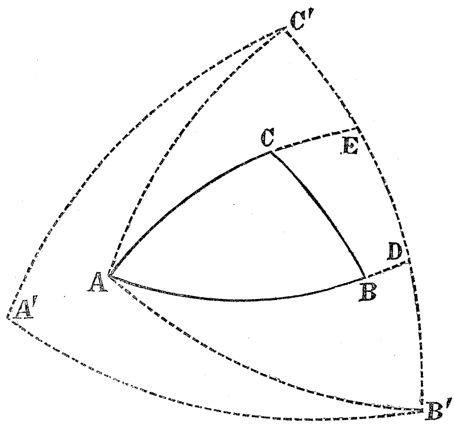


Fig. 7.

4. Bepaalt men de polen A', B', C' der zijden BC, CA en AB van een boldriehoek ABC, dan heet A'B'C' de **pooldriehoek** van ABC (fig. 7).

Daar elke zijde twee polen heeft, zullen wij voortaan met de pool A' van BC die be-

doelen, welke aan denzelfden kant van BC ligt als A, m.a.w., *A en A′ liggen op dezelfde van een der twee bolhelften, waarin de groote cirkel BC het bolopppervlak verdeelt.*

Wij zullen nu aantoonen, dat A, B en C de polen zijn van B′C′, C′A′ en A′B′, m.a.w., dat

ABC de pooldriehoek is van A′B′C′.

Men heeft: boog $AC' = 90°$, want C′ is een pool van AB.
boog $AB' = 90°$, want B′ is een pool van AC.

Volgens § 5 is dus A een pool van den cirkel B′C′. Wij hebben nu nog te bewijzen, dat A en A′ aan denzelfden kant van B′C′ liggen. Omdat A′ een pool is van BC en A en A′ aan denzelfden kant van BC liggen, is boog $AA' < 90°$, en daar A een pool van B′C′ is, liggen A en A′ ook aan denzelfden kant van cirkel B′C′. Derhalve is ABC de pooldriehoek van A′B′C′.

§ **10**. Het verband tusschen de elementen van een driehoek en zijn pooldriehoek wordt aangegeven door de volgende.

Eigenschappen.

De zijden van den pooldriehoek zijn de supplementen van de hoeken van den boldriehoek.

De hoeken van den pooldriehoek zijn de supplementen van de zijden van den boldriehoek.

Bewijs.

Verleng (fig. 7) de bogen AB en AC tot in D en E. Omdat A pool is van B′C′, is volgens § 6 $\angle BAC =$ boog DE. Verder is B′ pool van AC, dus $B'E = 90°$. Ook is C′ pool van AB, dus $C'D = 90°$.
Derhalve $$B'E + C'D = 180°$$

De bogen B′C′ en DE zijn dus elkaars supplement. Dit is dus ook het geval met $\angle$ A van $\triangle$ ABC en zijde B′C′ van $\triangle$ A′B′C′, De eerste eigenschap is hiermede bewezen.

Daar volgens § 9 ABC de pooldriehoek is van A′B′C′, zijn de zijden van ABC de supplementen van de hoeken van A′B′C′, m.a.w., de hoeken van A′B′C′ zijn de supplementen der zijden van ABC.

Noemt men de zijden van $\triangle$ ABC: a, b, c, en de hoeken: A, B, C, dan zijn dus de zijden van den pooldriehoek:

$180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, en de hoeken:
$180° - a$, $180° - b$, $180° - c$.

Opmerking. Omdat $180° - A$ een zijde van den pooldriehoek is, heeft men $$180° - A > 0,$$
$$\text{dus } A < 180°.$$

Dit geldt ook voor de hoeken B en C. Wij kunnen dus zeggen: *Elk der zes elementen van een boldriehoek is kleiner dan 180°.*

§ **11. Bepalingen.** *Men noemt twee boldriehoeken op denzelfden bol* **gelijk en gelijkvormig,** *wanneer de zijden en hoeken van den eenen gelijk zijn aan die van den anderen.*

Komen de gelijke elementen in beide driehoeken in dezelfde volgorde voor, dan heeten de driehoeken **congruent;** *ze kunnen dan samenvallen.*

Komen de gelijke elementen in tegengestelde volgorde voor, dan noemt men de driehoeken **symmetrisch;** *ze kunnen dan in 't algemeen niet samenvallen.* (Wanneer wel?)

In zes gevallen kan men tot de gelijk- en gelijkvormigheid van boldriehoeken besluiten, en wel

1e *als ze één zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk hebben*

2e *als ze twee zijden en den ingesloten hoek gelijk hebben;*

3e *als ze de drie zijden gelijk hebben;*

4e *als ze de drie hoeken gelijk hebben;*

5e *als ze twee zijden en den hoek tegenover één dezer gelijk hebben mits de som der hoeken tegenover het andere paar gelijke zijden niet gelijk is aan 180°;*

6e *als ze twee hoeken en de zijde tegenover één dezer gelijk hebben, mits de som der zijden tegenover het andere paar gelijke hoeken niet gelijk is aan 180°.*

Bewijs.

Eerste geval. Komen de gelijke elementen in dezelfde volgorde voor, dan kan men de driehoeken, evenals in de vlakke meetkunde, laten samenvallen; zij zijn dus congruent. Komen de gelijke elementen in tegengestelde volgorde voor, dan is de eerste driehoek congruent met den tegendriehoek van den tweeden, dus symmetrisch met den tweeden zelf.

Tweede geval. Beschouwt men de pooldriehoeken der twee gegeven driehoeken, dan hebben die één zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk en zijn daarom gelijk en gelijkvormig. De elementen der pooldriehoeken zijn dus twee aan twee gelijk, derhalve is dit ook het geval met de gegeven driehoeken.

§ **12.** Aan het bewijs van de overige gevallen ga vooraf de

Eigenschap. Als twee zijden van een boldriehoek even groot zijn, zijn de hoeken tegenover die zijden ook gelijk, en omgekeerd.

De waarheid van deze stelling bleek reeds in § 8; hier volgt een bewijs, waarbij geen gebruik wordt gemaakt van den correspondeerenden drievlakshoek aan het middelpunt van den bol.

Zij in fig 8 BA = BC. Teekent men den boog BD, die ∠ B halveert, dan hebben de driehoeken ABD en CBD gelijk:

BA = BC, BD = BD, ∠ ABD = ∠ CBD.

Zij zijn dus gelijk en gelijkvormig volgens het tweede geval. Dus

∠ A = ∠ C.

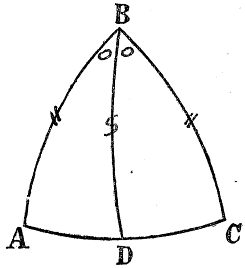


Fig. 8.

Is omgekeerd ∠ A = ∠ C, dan heeft de pooldriehoek van ABC twee gelijke zijden, dus ook twee gelijke hoeken, waaruit weer volgt, dat de oorspronkelijke driehoek twee gelijke zijden heeft.

Opmerking. Uit bovenstaand bewijs volgt nog:

AD = CD, en BD ⊥ AC, m. a. w.:

De boog, die den tophoek van een gelijkbeenigen boldriehoek middendoor deelt, deelt de basis loodrecht middendoor.

§ **13.** Wij zullen nu overgaan tot het bewijs van de overige gevallen van gelijk- en gelijkvormigheid.

Derde geval. Komen de gelijke elementen in tegengestelde volgorde voor, dan kan men ze zoo plaatsen (fig. 9), dat de gelijke zijden AB en PQ samenvallen, terwijl de overblijvende hoekpunten C en R aan weerskanten van AB komen te liggen. De boog CR snijde AB in D (D kan ook op 't verlengde van AB liggen, of met A of B samenvallen). Omdat AC = PR en BC = QR, zijn de driehoeken ACR en BCR gelijkbeenig, dus

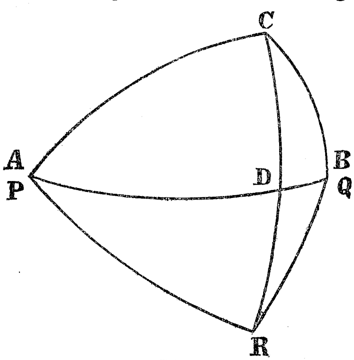


Fig. 9.

$$\begin{array}{l} \angle\, ACD = \angle\, PRD, \\ \angle\, BCD = \angle\, QRD, \\ \hline \angle\, ACB = \angle\, PRQ. \end{array} \quad \text{op}$$

De driehoeken ABC en PQR verkeeren nu onder het in 2^de^ genoemde geval en zijn dus gelijk en gelijkvormig.

Is boog CR gelijk aan 180°, dan gaan de driehoeken ACR en BCR in boltweehoeken over en heeft men ook

$$\angle ACB = \angle PRQ.$$

Is boog CR grooter dan 180°, dan bewijze men de gelijkheid der nevenhoeken van

$$\angle ACD \text{ en } \angle PRD$$

en van

$$\angle BCD \text{ en } \angle QRD.$$

Komen de gelijke zijden in dezelfde volgorde voor, dan is de eerste driehoek symmetrisch met den tegendriehoek van den tweeden, dus congruent met den tweeden zelf.

Vierde geval. Door beschouwing der pooldriehoeken brengt men dit geval tot het derde geval terug.

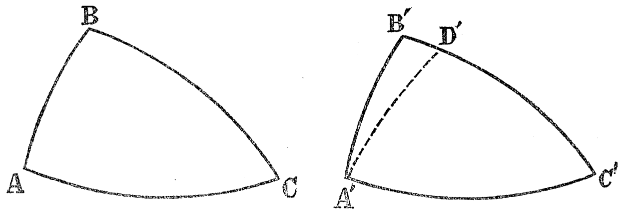


Fig. 10.

Aan den lezer wordt nu overgelaten het bewijs van de volgende eigenschap:

De boog, die den top van een gelijkbeenigen driehoek met het midden der basis verbindt, staat loodrecht op de basis en deelt den tophoek middendoor.

Vijfde geval. Laten ABC en A'B'C' (fig. 10) de boldriehoeken zijn, waarvan

$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ \angle C = \angle C',\ \angle B + \angle B' \lesseqgtr 180°.$$

Komen de gelijke elementen in dezelfde volgorde voor, dan kan men ABC zoo op A'B'C' plaatsen, dat AC langs A'C' valt, en daar $\angle C = \angle C'$, valt dan CB langs C'B'. Kwam nu AB niet langs A'B' te liggen, maar langs A'D' (waarbij D' een punt op B'C' is), dan was

$$AB = A'B' = A'D',$$

$$\text{dus } \angle B' = \angle A'D'B';$$

en daar $\angle A'D'C' + \angle A'D'B' = 180°$ is, zou ook $\angle B + \angle B' = 180°$ zijn, wat tegen de onderstelling strijdt. De beide driehoeken bedekken elkaar dus en zijn dan congruent.

Komen de gelijke elementen in tegengestelde volgorde voor, dan is de eerste boldriehoek congruent met den tegendriehoek van den tweeden, dus symmetrisch met den tweeden zelf.

Zesde geval. De pooldriehoeken der gegeven driehoeken verkeeren onder de in 5^e genoemde omstandigheden, zoodat ze gelijk en gelijkvormig zijn. Dit is dus ook het geval met de oorspronkelijke driehoeken.

Opmerking. Volgens het vijfde en zesde geval zijn twee rechthoekige boldriehoeken gelijk en gelijkvormig, als zij gelijk hebben

1^e de schuine zijde en een scheeven hoek;

2^e de schuine zijde en een rechthoekszijde.

Door middel van de laatste gevallen kan men nu ook bewijzen de eigenschap:

De spherische loodlijn, uit den top van een gelijkbeenigen boldriehoek op de basis neergelaten, deelt de basis en den tophoek middendoor, behalve wanneer de top een pool van de basis is.

§ **14.** De stellingen van § 8 omtrent een boldriehoek werden afgeleid uit overeenkomstige eigenschappen van een drievlakshoek. Men kan echter deze eigenschappen onafhankelijk van den drievlakshoek bewijzen.

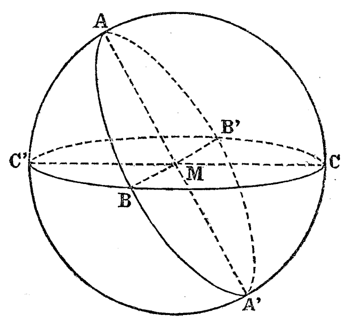


Fig. 11.

Eigenschap. De som der hoeken van een boldriehoek is grooter dan 180°.

Bewijs.

Driehoek ABC (fig. 11) vormt met elk zijner nevendriehoeken A'BC, AB'C en ABC' een boltweehoek. Volgens § 7 is nu, wanneer wij door $\triangle$ ABC de oppervlakte van dien boldriehoek voorstellen:

$$\frac{\triangle\ ABC + \triangle\ A'BC}{\text{opp. bol}} = \frac{\angle\ A}{360^\circ},$$

$$\frac{\triangle\ A'BC' + \triangle\ A'B'C'}{\text{opp. bol}} = \frac{\angle\ B}{360^\circ},$$

$$\frac{\triangle\ ABC + \triangle\ ABC'}{\text{opp. bol}} = \frac{\angle\ C}{360^\circ},$$

waaruit door samentelling volgt:

$$\frac{(\triangle ABC + \triangle A'BC + \triangle A'BC' + \triangle ABC') + (\triangle ABC + \triangle A'B'C')}{\text{opp. bol.}} =$$

$$= \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ},$$

of $$\frac{\text{opp. halve bol} + (\triangle ABC + \triangle A'B'C')}{\text{opp. bol}} = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ}.$$

De breuk links is grooter dan $\frac{1}{2}$, dus ook

$$\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ} > \tfrac{1}{2},$$

of $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$.

Bepaling. *Onder het* **spherisch exces** *van een boldriehoek verstaat men de som der hoeken, verminderd met 180°.*

Stelt E dit spherisch exces voor, dan is dus

$$E = A + B + C - 180^\circ.$$

Opmerkingen. 1. Zijn a, b en c de zijden van een boldriehoek, dan zijn $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$ de hoeken van den pooldriehoek. Volgens de eigenschap van § 14 is nu

$$540^\circ - (a + b + c) > 180^\circ$$

of $a + b + c < 360^\circ$, m.a.w.

De som der zijden van een boldriehoek is kleiner dan 360°.

2. $\angle ABC'$ is een buitenhoek van den boldriehoek.

Omdat nu $\angle ABC' + \angle B = 180^\circ$,

en $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$ is, volgt hieruit:

$\angle ABC' < \angle A + \angle C$, of in woorden:

Een buitenhoek van een boldriehoek is kleiner dan de som der niet-aanliggende binnenhoeken.

3. Omdat in den nevendriehoek ABC′ de som der hoeken grooter is dan 180°, is

$$180^\circ - A + 180^\circ - B + C > 180^\circ,$$

dus $180^\circ - B > A - C$, of in woorden:

Een buitenhoek van een boldriehoek is grooter dan het verschil der niet-aanliggende binnenhoeken.

§ **14.** A. **Eigenschap. Als in een boldriehoek de som der hoeken gelijk is aan of grooter is dan 360°, dan zijn alle hoeken stomp (Sturm).**

Bewijs.

Zij in driehoek ABC gegeven $A + B + C > 360^\circ$ en A de kleinste hoek, dan heeft men in den nevendriehoek op de zijde BC:

$$A + 180^\circ - B + 180^\circ - C > 180^\circ$$
$$2\,A > A + B + C - 180^\circ$$

$A > \frac{1}{2}(A + B + C) - 90^\circ$ waaruit het gestelde onmiddellijk volgt.

Met behulp van den pooldriehoek volgt hieruit de **eigenschap.**

Als in een boldriehoek de som der zijden gelijk is aan of kleiner is dan 180°, dan zijn alle zijden scherp.

Men kan deze eigenschap ook bewijzen zonder van den pooldriehoek gebruik te maken.

§ 15. **Eigenschap. Als twee zijden van een boldriehoek ongelijk zijn, staat tegenover de grootste der twee zijden een grootere hoek dan tegenover de kleinste, en omgekeerd.**

Bewijs.

Zij in $\triangle$ ABC (fig. 12) de zijde $AC > AB$. Pas op AC een stuk $AD = AB$ af. Volgens § 12 is nu $\angle ABD = \angle ADB$. De hoek ADB is buitenhoek van $\triangle$ BCD, dus

$$\angle ADB > \angle C - \angle CBD,$$

dus ook $\angle ABD > \angle C - \angle CBD,$

$$\angle ABD + \angle CBD > \angle C,$$

of $\angle ABC > \angle C.$

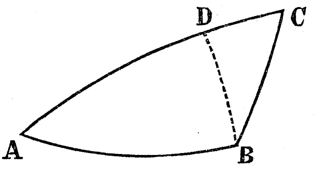


Fig. 12.

Bewijs van het omgekeerde.

Is gegeven, dat $\angle A > \angle B$ is, dan is

$$180^\circ - \angle A < 180^\circ - \angle B.$$

De pooldriehoek heeft derhalve twee ongelijke zijden; tegenover deze zijden liggen de hoeken $180^\circ - a$ en $180^\circ - b$, zoodat

$$180^\circ - a < 180^\circ - b,$$

of $a > b.$

§ 16. **Eigenschap. Elke zijde van een boldriehoek is kleiner dan de som, maar grooter dan het verschil der beide andere zijden.**

Bewijs.

Zij ABC de gegeven driehoek. Verleng AC met een stuk $CD = CB$, dan hebben wij te bewijzen, dat $AB < AD$ is.

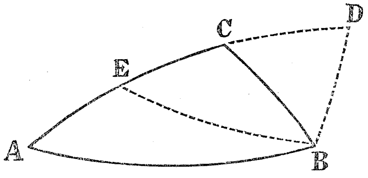


Fig. 13.

Men heeft: $\angle CBD = \angle CDB$,

dus $\angle ABD > \angle ADB$,

of volgens § 15 $AD > AB$.

Is $AC + BC$ gelijk aan of grooter dan $180°$, dan is AB, als zijnde $< 180°$ ook

$< AC + BC$

Past men op CA een stuk $CE = CB$ af, dan moet bewezen worden dat $AB > AE$ is.

Men heeft:	$\angle ABC < 180°$,
	of $\angle ABE + \angle EBC < \angle AEB + \angle CEB$;
en omdat	$\angle EBC = \angle CEB$,
is ook	$\angle ABE < \angle AEB$,
of volgens § 15	$AB > AE$.

§ 16. A. **Eigenschap. Als in een boldriehoek de som van twee hoeken grooter dan, gelijk aan, of kleiner dan 180° is, is de som der overstaande zijden respectievelijk ook grooter dan, gelijk aan of kleiner dan 180°.**

Bewijs.

Zij ABC de boldriehoek, waarin $\angle A + \angle B < 180°$ is. Teeken de nevendriehoek op de zijde AC, dan is in den driehoek ACB′ $\angle CAB' > \angle B'$, en dus ook $CB' > AC$. Daar $BC + AC$ dus kleiner is dan $BC + CB'$ of $180°$ volgt uit $\angle A + \angle B < 180°$ ook $BC + AC < 180°$. Is echter $\angle A + \angle B = 180°$, dan heeft men in den nevendriehoek $\angle CAB' = \angle B'$, of $AC = CB'$, en dus $AC + BC = 180°$. Is $\angle A + \angle B > 180°$, dan is $\angle CAB < \angle B'$ of $AC > CB'$ of $AC + BC > 180°$.

Men ziet gemakkelijk in, dat ook de omgekeerde eigenschap waar is.

§ 16. B. **Eigenschap. Als twee boldriehoeken twee zijden gelijk hebben, doch de ingesloten hoek in den eersten driehoek grooter is dan die in den tweeden, dan is de derde zijde van den eersten driehoek ook grooter dan die van den tweeden.**

Men kan het bewijs geven op dezelfde wijze als in de planimetrie. Ook de omgekeerde eigenschap is waar.

§ 17. **Eigenschap. Wanneer men uit een punt op een bol een boog trekt loodrecht naar een grooten cirkel, dan is deze boog, als hij kleiner dan 90° is, kleiner dan elke boog, dien men uit dat punt naar een punt van den grooten cirkel kan trekken.**

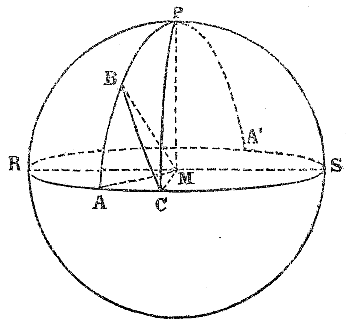


Fig. 14.

Bewijs.

Is B het gegeven punt en RAS de gegeven groote cirkel, waarvan P een pool is, dan staat de groote cirkel door P en B loodrecht op cirkel RAS. Verbindt men B met een willekeurig punt C van boog RAS, dan is in boldriehoek PBC volgens § 16

$$PB + BC > PC,$$

en omdat $PC = PA\ (= 90°)$, is ook

$$PB + BC > PA$$

$$BC > PA - PB$$

of $BC > BA$,

waarmee het gestelde bewezen is.

Verlengt met boog AB door P tot in A′, dan is boog BPA′ de grootste van alle bogen, die men van B naar een punt van cirkel RAS kan trekken.

Bepaling. *Men noemt de boog BA de spherische afstand van het punt B tot den grooten cirkel RAS.*

Evenals in de vlakke meetkunde bewijst men:

De meetkundige plaats der punten op een boloppervlak, wier spherische afstanden tot twee groote cirkels van het bolvlak even groot zijn, bestaat uit twee groote cirkels, die de hoeken tusschen de gegeven cirkels middendoor deelen, en

De m. p. der punten op een boloppervlak, die spherisch even ver van twee punten van dit bolvlak verwijderd zijn, is de groote cirkel, die de spherische afstand dezer punten loodrecht middendoor deelt.

§ 18. Constructies op een bolvlak.

A. **De straal van een gegeven massieven bol te construeeren.**

Beschrijft men uit een willekeurig punt P (fig. 15) van het boloppervlak een kleinen cirkel, en neemt men daarop drie willekeurige punten A, B en C. dan kan de vlakke driehoek ABC geconstrueerd worden (fig. 16), en tevens daarin het punt M, waarin de as van den cirkel het vlak van $\triangle$ ABC snijdt. Van den rechthoekigen $\triangle$ PAQ uit fig. 15 zijn nu bekend: de hoogtelijn AM op de hypotenusa en de rechthoekszijde PA. Men construeert dus (fig. 16) den driehoek $A'B'C'$ met het middelpunt M' van den omgeschreven cirkel, trekt door M' een lijn loodrecht op $A'M'$, beschrijft uit A' met de koorde AP als straal een cirkelboog, die de loodlijn in P' snijdt, en maakt $\angle P'A'Q' = 90°$, dan is $P'Q'$ de verlangde middellijn.

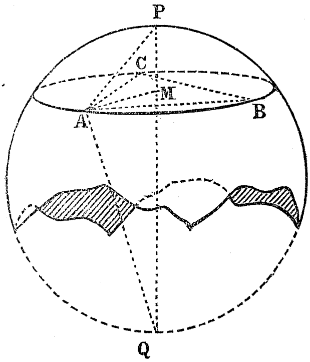


Fig. 15.

B. **Door twee gegeven punten A en B van een massieven bol een grooten cirkel te construeeren.**

Men construeert eerst den straal r van den bol en beschrijve uit A en B als polen met $r\sqrt{2}$ als passeropeningen cirkels, die elkaar in de polen P en P' van den boog AB zullen snijden. De cirkel uit P of P' als pool, met $r\sqrt{2}$ als passeropening beschreven, is de gevraagde groote cirkel.

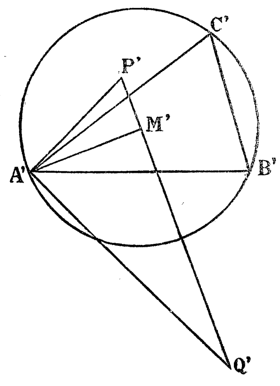


Fig. 16.

C. **Een gegeven boog AB loodrecht middendoor te deelen.**

D. **Een gegeven boltweehoek middendoor te deelen.**

E. **Door een gegeven punt een grooten cirkel loodrecht op een gegeven grooten cirkel te construeeren.**

De constructies C, D en E worden uitgevoerd als in de vlakke meetkunde.

Opmerking. Door middel van de constructies C en D kan men de punten op een bolvlak bepalen, die

1e spherisch even ver van de hoekpunten van een boldriehoek,
2e spherisch even ver van de zijden verwijderd zijn.

F. **Door een gegeven punt op een gegeven grooten cirkel een grooten cirkel te construeeren, die met den eersten een gegeven hoek maakt.**

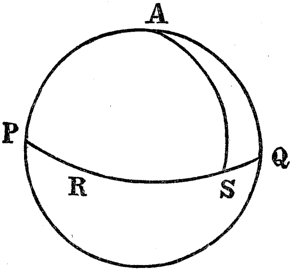


Fig. 17.

Is A het gegeven punt (fig. 17), PAQ de gegeven groote cirkel, dan beschrijve men uit A als pool den grooten cirkel PRQ. Past men uit Q op dien cirkel een boog QS af, waarvan de koorde overeenkomt met den gegeven hoek, dan is de cirkel door A en S een der gevraagde.

G. **Een boldriehoek te construeeren, als drie der zes elementen gegeven zijn.**

Het construeeren van een boldriehoek, waarvan gegeven zijn
1e een zijde en de aanliggende hoeken,
2e twee zijden en den ingesloten hoek,
3e de drie zijden,
behoeft na de voorafgaande constructies geen toelichting.

Zijn van een boldriehoek de drie hoeken gegeven, dan kent men van den pooldriehoek de drie zijden.

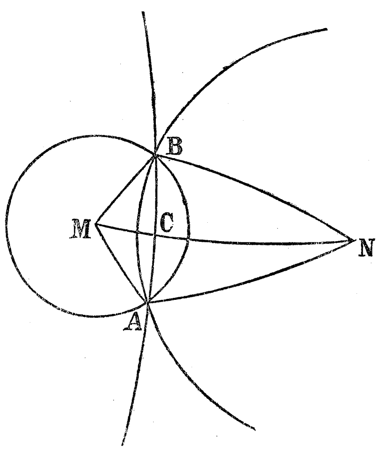


Fig. 18.

Bepaalt men den pooldriehoek van dien pooldriehoek; dan heeft men den gevraagden driehoek.

De overblijvende gevallen worden in het derde hoofdstuk behandeld.

§ **19.** Twee verschillende cirkels op een bolvlak kunnen hoogstens twee punten gemeen hebben. Hadden ze drie of meer punten gemeen, dan zouden hun vlakken geheel samenvallen.

Eigenschap. Als twee kleine cirkels op een bol twee punten gemeen hebben, deelt de groote cirkel door hun polen den verbindingsboog hunner snijpunten loodrecht middendoor.

Bewijs.

Zijn (fig. 18) MA en NA de kleine cirkels, die elkaar in A en B snijden, dan is M, evenals N, spherisch even ver van A en B verwijderd.

Derhalve is MN de m.p. der punten, die spherisch evenver van A en B liggen. MN deelt dus AB loodrecht middendoor.

Opmerking. Laat men cirkel M en punt A vast, en wordt cirkel N zoo bewogen dat B tot A nadert, dan nadert ook C, het snijpunt van MN en AB, tot A. Beide punten B en C vallen gelijktijdig met A samen. Men zegt, dat in dezen stand de cirkels elkaar raken.

Bepaling. *Twee cirkels op een bol* **raken** *elkaar, als zij twee samenvallende punten gemeen hebben.*

Als de cirkels M en N elkaar raken, heeft de groote cirkel door A en B met elk der kleine twee samenvallende punten gemeen, m.a.w. raakt aan beide cirkels. Men heeft dus de

Eigenschap. Als twee kleine cirkels op een bol elkaar raken, liggen de polen dier cirkels met het raakpunt op een grooten cirkel, terwijl zij in het raakpunt een gemeenschappelijken grooten raakcirkel hebben, die loodrecht staat op den verbindingsboog van de polen der cirkels.

Is een der cirkels, b.v. N, een groote cirkel, dan valt hij samen met den grooten cirkel, die M in A raakt.

§ 20. Eenige constructies.

Een punt op een bol kan ten opzichte van een kleinen cirkel op verschillende wijzen gelegen zijn. Het kan liggen

1e op het kleinste der twee deelen van het boloppervlak, waarin dit door den cirkelomtrek verdeeld wordt;

2e op het grootste deel;

3e op den cirkelomtrek zelf.

In het eerste geval zegt men, dat het punt *binnen* den cirkel ligt, in het tweede geval er *buiten*.

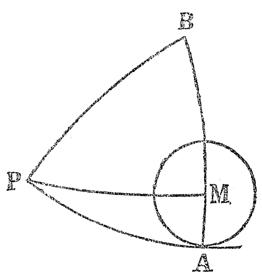


Fig. 19.

Constructie I. Uit een punt buiten een kleinen cirkel een grooten cirkel te construeeren, die den kleinen cirkel raakt.

Zij (fig. 19) M de gegeven kleine cirkel, waarvan r de spherische straal is, P het gegeven punt, en PM $= a$. Is PA de gevraagde groote cirkel, dan staat de groote cirkel door M en het raakpunt A loodrecht op PA (§ 19). Verlengt men nu AM met een boog MB zoo, dat $AB = 90°$, dan is B een pool van PA. Van den $\triangle$ PMB zijn nu bekend:

$$PM = a, \; BM = 90° - r, \; PB = 90°.$$

Door op PM dezen driehoek te construeeren, verkrijgt men het punt B. De groote cirkel, waarvan B een pool is, is dan een der gevraagde.

Discussie. De constructie is slechts mogelijk, als de omtrek van $\triangle$ PMB kleiner dan 360°, en elke zijde kleiner dan de som der beide andere is. Daar BM steeds kleiner dan PB is, moet men hebben:

$$a + (90° - r) + 90° < 360°, \text{ of } \quad a < 180° + r \quad \ldots\ldots (\alpha)$$
$$a < 90° + (90° - r) \quad , \text{ of } 180° - a > r \quad \ldots\ldots (\beta)$$
$$90° < a + (90° - r) \quad , \text{ of } \quad a > r \quad \ldots\ldots (\gamma)$$

Aan (α) wordt steeds voldaan, omdat $a < 180°$ is. Volgens (γ) moet P buiten den gegeven cirkel liggen, terwijl volgens (β) de spherische afstand van P tot het tegenpunt M′ van M grooter dan r moet zijn. Noemt men nu den cirkel, uit M′ als pool met r als spherische straal den *tegencirkel* van den gegeven cirkel, dan zijn de gevonden voorwaarden:

Het gegeven punt moet zoowel buiten den gegeven cirkel, als buiten den tegencirkel daarvan liggen.

Is aan deze voorwaarden voldaan, dan zijn er twee oplossingen.

Vraag. Hoe wordt de constructie, als het gegeven punt op den cirkel of op zijn tegencirkel ligt? Hoeveel oplossingen zijn er dan?

Wat betreft de onderlinge ligging van twee kleine cirkels op een bol, gelden de volgende gevallen.

1e *De spherische afstand a der middelpunten is kleiner dan het verschil der spherische stralen; de eene cirkel ligt dan binnen den anderen.*

2e *a is gelijk aan het verschil der stralen; de cirkels raken elkaar inwendig.*

3e *a is kleiner dan de som, maar grooter dan het verschil der stralen; de cirkels snijden elkaar in twee punten.*

4e *a is gelijk aan de som der stralen; de cirkels raken elkaar uitwendig.*

5e *a is grooter dan de som der stralen; de cirkels liggen geheel buiten elkaar.*

Constructie II. Een grooten cirkel te construeeren, die aan twee gegeven kleine cirkels raakt.

Eerste geval. Liggen de gegeven cirkels M en N (met spherische stralen r_1 en r_2) op één der twee bolhelften, waarin de gevraagde groote cirkel het boloppervlak verdeelt (fig. 20), dan zijn, als P een pool van den gevraagden cirkel is, van den boldriehoek MNP bekend:

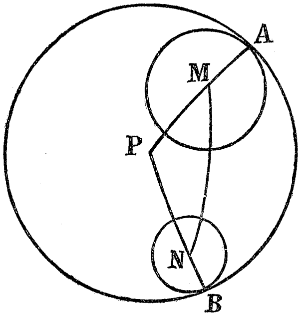


Fig. 20.

$MN = a$, $PM = 90° - r_1$, $PN = 90° - r_2$.

Door op MN dezen driehoek te construeeren, verkrijgt men het punt P. De groote cirkel, waarvan P een pool is, is dan een der gevraagde.

Discussie. Stelt men $r_1 > r_2$, dan is $PM < PN$, zoodat voldaan moet worden aan

$a + (90° - r_1) + (90° - r_2) < 360°$, of $a < 180° + (r_1 + r_2)$ . . . . . (α)

$a < (90° - r_1) + (90° - r_2)$ of $180° - a > r_1 + r_2$ . . . . . . (β)

$(90° - r_2) < a + (90° - r_1)$ of $a > r_1 - r_2$ . . . . (γ)

Omdat $a < 180°$ is, wordt aan (α) steeds voldaan. Volgens (γ) mag de eene cirkel niet binnen den anderen liggen, terwijl volgens (β) de tegencirkel van den kleinsten cirkel geheel buiten den grootsten moet liggen.

Is aan deze voorwaarden voldaan, dan vindt men twee **uitwendige raakcirkels**. Deze cirkels snijden elkaar in twee tegenpunten, die men **uitwendige gelijkvormigheidspunten** noemt. Deze punten liggen op den grooten cirkel, die door de polen der gegeven cirkels gaat.

De constructie wordt eenvoudiger, als de cirkels elkaar inwendig raken.

Tweede geval. Liggen de gegeven cirkels M en N aan verschillende zijden van den gevraagden cirkel P (fig. 21), dan zijn van den boldriehoek PMN bekend:

$MN = a$, $PM = 90° - r_1$, $PN = 90° + r_2$.

Door op MN dezen driehoek te construeeren, verkrijgt men het punt P. De groote cirkel, waarvan P een pool is, is dan een der gevraagde.

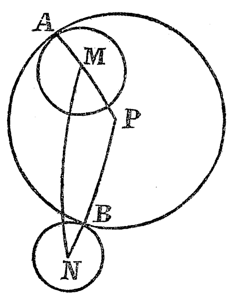


Fig. 21.

Discussie. Omdat $PN > PM$ is, moet voldaan worden aan

$a + (90° - r_1) + (90° + r_2) < 360°$, of $a < 180° + (r_1 - r_2)$ . . . . (α)

$a < (90° - r_1) + (90° + r_2)$, of $180° - a > r_1 - r_2$ . . . . (β)

$90 + r_2 < a + (90° - r_1)$, of $a > r_1 + r_2$ . . . . (γ)

Stelt men $r_1 > r_2$, dan is aan (α) steeds voldaan. Volgens (γ) moeten de cirkels geheel buiten elkaar liggen, terwijl volgens (β) de tegencirkel van den kleinsten cirkel niet geheel binnen den grootsten mag liggen. Is aan deze voorwaarden voldaan, dan vindt men twee **inwendige raakcirkels.** Deze cirkels snijden elkaar in twee tegenpunten, die men **inwendige gelijkvormigheidspunten** noemt. Ze liggen op den grooten cirkel, die door de polen der gegevens cirkels gaat. De constructie wordt eenvoudiger, als de cirkels elkaar uitwendig raken.

§ 21. Eenige merkwaardige punten en lijnen in den boldriehoek.

Bepalingen. *Onder een* **mediaan** *van een boldriehoek verstaat men den boog, die een hoekpunt met het midden der overstaande zijde verbindt.*

Een **bissectrix** *van een boltweehoek is de boog, die een hoek van dien tweehoek middendoor deelt.*

Een **middelloodlijn** *van een boldriehoek is een boog, die een der zijden van dien driehoek loodrecht middendoor deelt.*

Een **hoogtelijn** *van een boldriehoek is een boog, die uit een hoekpunt loodrecht op de overstaande zijde is getrokken.*

Volgens § 17 kan men uit elk hoekpunt van een boldriehoek twee hoogtelijnen trekken; deze zijn elkaars supplement.

Eigenschappen.

A. **De medianen van een boldriehoek snijden elkaar in een punt.**

Zij ABC een boldriehoek, M het middelpunt van den bol, waarop die driehoek ligt. D, E en F zijn de middens der zijden BC, CA en AB. Daar de straal MD de koorde BC middendoor deelt, snijdt het vlak van den grooten cirkel AD den vlakken driehoek ABC volgens een zwaartelijn. Dit is eveneens het geval met de andere groote cirkels BE en CF. Omdat de zwaartelijnen van den vlakken driehoek ABC door één punt S gaan, snijden de medianen van boldriehoek ABC elkaar in het punt Z, waar de bolstraal MS het boloppervlak ontmoet. Hiermee is het gevraagde bewezen.

Opmerking. Als drie groote cirkels door een punt gaan, gaan ze ook door het tegenpunt daarvan. Deze eigenschap wordt in het volgende niet steeds vermeld.

B. **De bissectrices der hoeken (binnenbissectrices) van een boldriehoek snijden elkaar in één punt.**

Omdat de bissectrix van een boltweehoek de m.p. der punten van het bolloppervlak is, die spherisch even ver van de beenen van dien tweehoek liggen, is het snijpunt van twee binnenbissectrices even ver van de beenen van den derden hoek verwijderd. Ook de derde bissectrix moet dus door dit snijpunt gaan.

Beschrijft men uit dit punt als pool met den afstand van dit punt tot een zijde als straal een kleinen cirkel, dan ontstaat de **ingeschreven cirkel** van den boldriehoek.

C. **Twee buitenbissectrices en de binnenbissectrix van den derden hoek van een boldriehoek snijden elkaar in één punt.**

Bewijs als boven. Dit snijpunt is de pool van een **aangeschreven cirkel.** Elke boldriehoek heeft drie aangeschreven cirkels.

Opmerking. Een aangeschreven cirkel van een boldriehoek is tevens ingeschreven cirkel van een nevendriehoek.

D. **De middelloodlijnen van een boldriehoek gaan door één punt.**

Omdat de middelloodlijn van een zijde van een boldriehoek de m.p. der punten van het bolloppervlak is, die spherisch even ver van de uiteinden van die zijde liggen, ligt het snijpunt van twee middelloodlijnen even ver van de drie hoekpunten. Ook de derde middelloodlijn gaat dus door dit punt.

Dit punt heet de pool van den **omgeschreven cirkel.** De omgeschreven cirkel van een boldriehoek ABC is tevens omgeschreven cirkel van den vlakken driehoek ABC.

E. **De hoogtelijnen van een boldriehoek gaan door één punt (hoogtepunt).**

Zie voor het bewijs § 27.

§ 21. A. Met behulp der poolfiguur kan men uit de gevonden eigenschappen nieuwe afleiden. Twee punten in de 1ste figuur P en Q, waarvan de spherische afstand is PQ, gaan in de poolfiguur over in 2 groote cirkels, die een hoek 180°—PQ maken. Twee groote cirkels, die een hoek α maken, gaan in de poolfiguur over in 2 punten, die een sphericshen afstand hebben van 180°—α. Met 3 cirkels, die door één punt gaan, komen overeen 3 punten, die op een grooten cirkel liggen en met 3 punten, die op een grooten cirkel liggen, komen overeen 3 cirkels, die door één punt gaan.

Deelt men bij een boldriehoek niet alleen de zijde AB middendoor, die kleiner is dan 180°, maar ook den boog AB, die grooter is dan 180°, dan zou men de eigenschap der medianen aldus kunnen uitdrukken:

De bogen, die de hoekpunten van een boldriehoek verbinden met de 6 middens der overstaande zijden snijden elkaar viermaal 3 aan 3 in één punt.

Met behulp der poolfiguur volgt nu de **eigenschap: De snijpunten van de 6 bissectrices van een boldriehoek met de overstaande zijden liggen viermaal 3 aan 3 op een grooten cirkel.**

B. en C. **Eigenschap. De middens van 2 zijden van een boldriehoek en de punten op de 3de zijde, gelegen op 90° afstand van haar midden, liggen op een grooten cirkel. Op elke zijde van een driehoek bevinden zich 2 punten op een afstand van 90° van haar midden; in het geheel zijn er dus 6 zulke punten; deze liggen ook op een grooten cirkel. Trekt men uit de hoekpunten van een driehoek bogen van 90° naar één dezer 4 cirkels, dan zijn de hoeken, onder welke deze cirkel door die bogen wordt gesneden, gelijk.**

Deze gelijke hoeken komen overeen met de 3 stralen naar de zijden van een der 4 ingeschreven cirkels bij den oorspronkelijken driehoek. (Eén ingeschreven en 3 aangeschreven).

D. **Eigenschap. Zet men van uit de hoekpunten van een boldriehoek bogen van 90° af op de binnen- en buitenbissectrices, dan ontstaan 4 maal 3 punten, die op een grooten cirkel liggen. Deze groote cirkels snijden de zijden van den boldriehoek onder gelijke hoeken.**

De spherische middelpunten van deze 4 cirkels zijn de middelpunten van den ingeschreven cirkel en van de 3 aangeschreven cirkels van den driehoek.

E. **Eigenschap. Trekt men uit de hoekpunten van een boldriehoek bogen van 90° naar de overstaande zijden, dan snijden die bogen de overstaande zijden in punten die op een grooten cirkel liggen.**

Het hoogtepunt van den driehoek is het spherisch middelpunt van dezen cirkel.

§ 22. **Eigenschap. Een boldriehoek en zijn tegendriehoek hebben even groote oppervlakte.**

Bewijs.

Zij in fig. 22 $A'B'C'$ de tegendriehoek van driehoek ABC en P de pool van den omgeschreven cirkel van ABC. Het tegenpunt P' van P is dan de pool van den omgeschreven cirkel van $A'B'C'$. Door P met A, B en C, en P' met A', B' en C' door bogen van groote cirkels te verbinden, ontstaan drie paren gelijkbeenige boldriehoeken, nl.

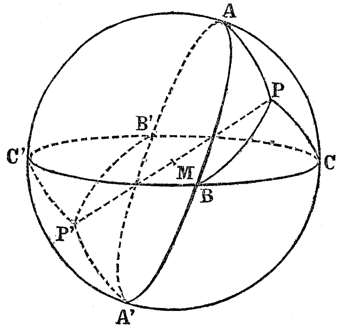


Fig. 22.

$$PAB \text{ en } P'A'B',\ PBC \text{ en } P'B'C'$$
$$PCA \text{ en } P'C'A'.$$

Daar nu de driehoeken van elk paar congruent zijn, hebben ze dezelfde oppervlakte, dus ook de driehoeken ABC en $A'B'C'$.

§ 23. De eigenschap van § 22 voert ons tot de volgende

Eigenschap. Het oppervlak van een boldriehoek staat tot dat van den bol, als zijn spherisch exces tot 720°.

Bewijs.

In § 14 (fig. 11) hebben wij gevonden:

$$\frac{\text{opp. halve bol} + (\triangle ABC + \triangle A'B'C')}{\text{opp. bol}} = \frac{A+B+C}{360^\circ}.$$

Volgens § 22 verandert deze vergelijking in

$$\frac{\text{opp. halve bol} + 2\triangle ABC}{\text{opp. bol}} = \frac{A+B+C}{360^\circ},$$

$$\tfrac{1}{2} + \frac{2\triangle ABC}{\text{opp. bol}} = \frac{A+B+C}{360^\circ},$$

$$\frac{2\triangle ABC}{\text{opp. bol}} = \frac{A+B+C-180^\circ}{360^\circ} = \frac{E}{360^\circ},$$

$$\text{dus } \frac{\triangle ABC}{\text{opp. bol}} = \frac{E}{720^\circ}.$$

§ **24. Cirkel van Lexell.** In deze paragraaf zullen wij de m.p. van den top C der boldriehoeken ABC bepalen, die alle op dezelfde basis AB staan, aan denzelfden kant daarvan liggen en waarvan de oppervlakte constant is.

Vooreerst zullen wij de grootte van $\angle PBC = \angle PCB$ (fig. 22) uitdrukken in de hoeken A, B en C. P is hierbij de pool van den omgeschreven cirkel.

Omdat de driehoeken PAB, PBC, PCA gelijkbeenig zijn, is

$$\angle B = \angle PBC + \angle PAB,$$
$$\underline{\angle C = \angle PCB + \angle PAC,}$$
$$B + C = 2 \angle PBC + A,$$
$$\text{dus } \angle PBC = \frac{B + C - A}{2}.$$

Stelt men $A + B + C = 2S$, dan wordt

$$\angle \mathbf{PBC} = \mathbf{S} - \mathbf{A}.$$

Op gelijke wijze blijkt dat

$$\angle \mathbf{PAB} = \angle PBA = \mathbf{S} - \mathbf{C},$$
$$\angle \mathbf{PAC} = \angle PCA = \mathbf{S} - \mathbf{B}.$$

Dit gaat ook nog door als P midden op een zijde, bij voorbeeld midden op AB ligt.

Ligt echter P buiten driehoek ABC, bij voorbeeld aan den kant van AB, dan vindt men voor de hoeken PAB en PBA de uitdrukking $C - S$.

Om nu bovengenoemde m.p. te bepalen, bedenke men, dat van een boldriehoek, waarvan de oppervlakte constant is, ook E (het spherisch exces), volgens § 23, constant is, dus ook 2 S, de som der hoeken.

Zij nu (fig. 23) ABC een der bedoelde boldriehoeken, A' en B' de tegenpunten van A en B. De hoeken van den topdriehoek $A'B'C$ zijn:

$A' = 180° - A$, $B' = 180° - B$, en C.

Is M' de pool van den omgeschreven cirkel van $\triangle A'B'C$, dan is volgens hetgeen wij in 't begin van deze paragraaf bewezen:

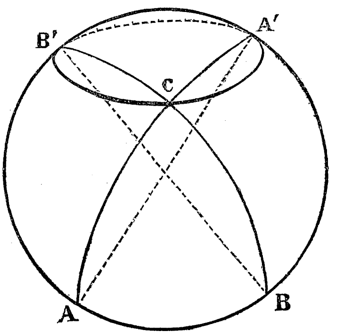


Fig. 23.

$$\angle M'B'A' = \angle M'A'B' = \frac{A'+B'-C}{2} = \frac{180°-A+180°-B-C}{2} = 180°-S,$$

dus constant, en omdat A' en B' als tegenpunten van A en B standvastig zijn, is ook M' constant, dus ook de omgeschreven cirkel van $\triangle A'B'C$.

De gevraagde m.p. is dus een cirkelboog, die gaat door de tegenpunten van de uiteinden der basis.

Deze cirkel heet: **cirkel van Lexell.**

Voor een driehoek ABC′, die aan den anderen kant van AB ligt en waarvan de top C′ ook op den cirkel van Lexell ligt, is het oppervlak in den regel verschillend van dat van driehoek ABC. Voor onze figuur ligt dan P buiten driehoek

$A'B'C'$ en men heeft: $\angle PA'B' = \angle PB'A' = S' - 180°$. Nu is $S' - 180° = 180° - S$ of $S + S' = 360°$. De som der hoeken van beide driehoeken is dus 720° of **opp. ABC + opp. ABC′ = opp. halve bol.** Ligt P midden op $A'B'$, dan is **opp. ABC = opp. ABC′.**

Valt de top C van driehoek ABC samen met B', dan gaat de driehoek over in een even grooten boltweehoek. BC raakt dan in B' aan de meetk. plaats.

Neemt men aan, dat de toppen der gelijke driehoeken mogen liggen op beide bolhelften, waarin AB het boloppervlak verdeelt, dan bestaat de meetk. plaats uit **twee bogen** van even groote cirkels, die elkaar in A' en B' snijden. Hun vlakken maken gelijke hoeken met het vlak van den grooten cirkel AB en de lijn, die hun spherische middelpunten verbindt, staat loodrecht op dit vlak.

§ 24 A. **Eigenschap. Van alle boldriehoeken, die een vasten tophoek en constanten omtrek hebben, raken de grondlijnen aan een kleinen cirkel. (Sorlin).**

Bewijs.

Zij ABC een der driehoeken, waarvan $\angle C$ vast is, dan beschrijve men den ingeschreven cirkel van den nevendriehoek $C'AB$. Als deze raakt aan de zijden CA en CB in de punten P en Q, dan is $CP = CQ =$ halve omtrek van ABC. Voor een andere raaklijn $A'B'$ aan denzelfden boog vindt men $CP = CQ =$ halve omtrek van $A'B'C$.

§ 24. B. **Analogon van de stelling van Pythagoras in de bolmeetkunde** (fig. 23a).

Zij ABC rechthoekig in C en nemen wij aan, dat de zijden van ABC kleiner zijn dan 90°. Zij $A_1B_1C_1$ de pooldriehoek van ABC. De zijden van ABC en $A_1B_1C_1$ snijden elkaar in P, Q, R en S. Nu is: opp. ABB_1A_1 = opp. ACSP + opp. BCRQ. Daar A pool is van RQ hebben wij:

$$\text{Opp. } AQR = \frac{A}{720°} \times O$$

$$\text{Opp. } BSP = \frac{B}{720°} \times O$$

$$\text{Opp. } CA_1B_1 = {}^1/_8 \times O,$$

als wij door O het oppervlak van den bol voorstellen.

Verder hebben wij:

$$\text{Opp. ACSP} + \text{opp. BCRQ} = \triangle\,\text{BSP} - \triangle\,\text{ABC} + \triangle\,\text{AQR} - \triangle\,\text{ABC}$$

$$= \frac{A+B}{720^\circ} \times O - \triangle\,\text{ABC} - \triangle\,\text{ABC} = \frac{A+B}{720^\circ} \times O - \frac{A+B+C-180^\circ}{720^\circ}$$

$$\times O - \triangle\,\text{ABC} = \frac{180^\circ - C}{720^\circ} \times O - \triangle\,\text{ABC} = {}^1/_8 \times O - \triangle\,\text{ABC} =$$

opp. ABB_1A_1. (Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1895).

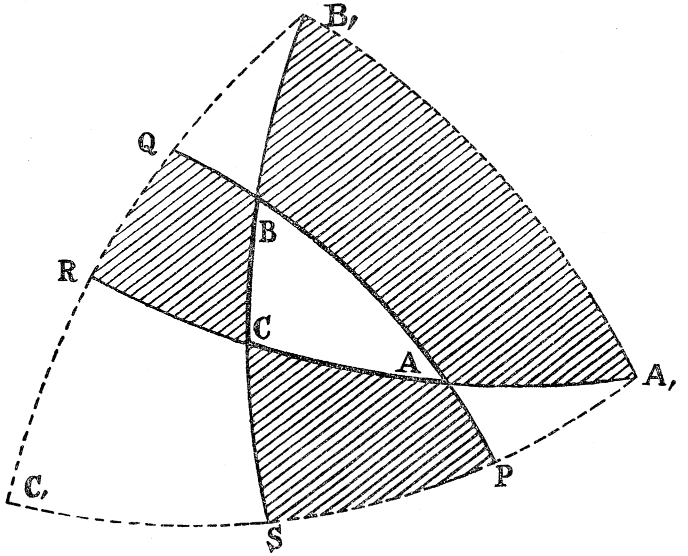


Fig. 23a.

§ 24. C. Toepassingen.

Vraagstuk 1. Een gegeven boldriehoek ABC te veranderen in een gelijkbeenigen driehoek, die met den eersten de zijde AB gemeen heeft.

Oplossing. Beschrijf den cirkel van Lexell, gaande door A', B' en C, en de middelloodlijn van AB. Deze laatste snijdt genoemden cirkel in 2 punten. Kies het snijpunt, dat met C op dezelfde bolhelft ligt ten opzichte van AB. Zij dit punt C' dan is ABC' de gevraagde driehoek.

Vraagstuk 2. Een gegeven boldriehoek ABC te veranderen in een even grooten boltweehoek.

Oplossing. Construeer een grooten cirkel, die in A' of B' raakt aan den cirkel van Lexell.

Vraagstuk 3. Een boldriehoek te consrtueeren even groot als een gegeven driehoek ABC, als de zijde AD van den gevraagden driehoek gegeven is en beide driehoeken den hoek A gemeenschappelijk moeten hebben (fig. 23b).

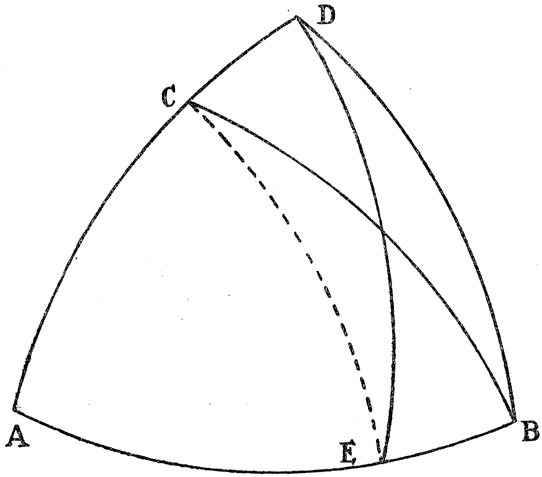


Fig. 23b.

Oplossing. Zij ABC de gegeven driehoek en AD de zijde. Verbind D met B en beschrijf den cirkel van Lexell die gaat door B_1 D_1 en C. Als E het goede gelegen snijpunt is van AB met dezen cirkel, dan is ADE de gevraagde driehoek; want drieh. ABD—drieh. BDE $=$ drieh. ABD—drieh. BDC of driehoek ADE $=$ driehoek ABC.

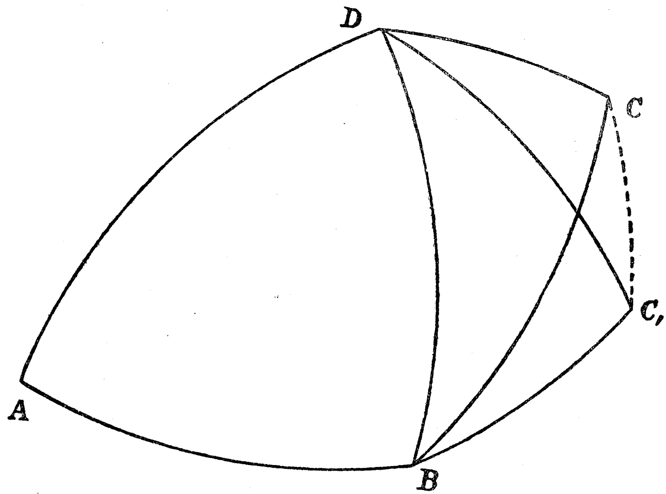


Fig. 23c.

Vraagstuk 4. Een boldriehoek te construeeren even groot als een gegeven bolvierhoek (fig. 23c).

Oplossing. Zij ABCD de gegeven bolvierhoek. Trek de diagonaal

BD en beschrijf den cirkel van Lexell voor C, B_1 en D_1. Verleng AB tot deze cirkel in het geschikte punt C_1 wordt gesneden, dan is ADC_1 de gevraagde driehoek.

Vraagstuk 5. Een bolveelhoek te veranderen in een even grooten boldriehoek.

Oplossing. Men construeere eerst een bolveelhoek, die een hoekpunt minder heeft, enz.

Vraagstuk 6. Een boldriehoek in 2 gelijke deelen te verdeelen door een lijn uit één der hoekpunten (fig. 23d).

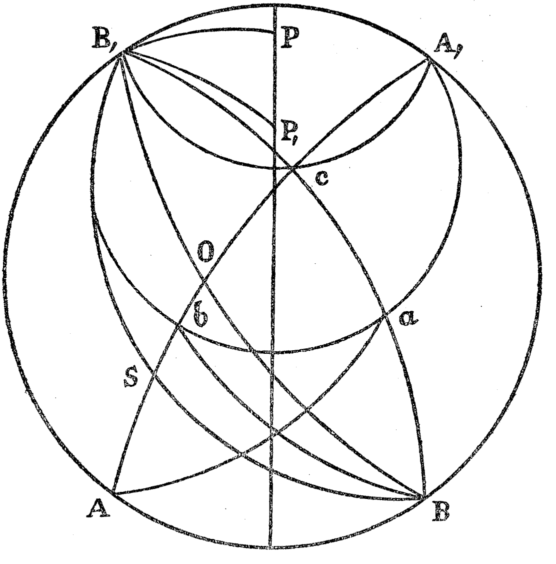


Fig. 23d.

Oplossing. Zij ABC de boldriehoek en A_1 B_1 C de cirkel van Lexell. Verander eerst den driehoek volgens vraagstuk 2 in een even grooten boltweehoek $ABOB_1$ en deel dezen door boog B_1 S B middendoor. Construeer vervolgens in B_1 een loodboog op B_1 S B, die de middelloodlijn van A_1 B_1 in P_1 snijdt. Nu is P_1B_1 de spherische straal van den cirkel van Lexell voor alle boldriehoeken, die op AB staan en half zoo groot zijn als ABC. Deze cirkel snijdt de opstaande zijden AC en BC in de punten *b* en *a*, zoodat Aa en Bb twee bogen zijn, die aan het gevraagde voldoen.

Vraagstuk 7. Een gegeven bolvierhoek door een lijn uit één der hoekpunten in twee gelijke deelen te verdeelen.

Oplossing. Men verandere eerst den bolvierhoek in een even grooten boldriehoek en deele dezen door een boog uit een der hoekpunten middendoor.

Welke moeielijkheid kan zich dan nog voordoen?

Vraagstuk 8. Een gegeven boldriehoek in twee gelijke deelen te verdeelen door een lijn uit een gegeven punt in een der zijden.

Oplossing. Men verandere eerst den driehoek in een even grooten, die tot één zijner hoekpunten heeft het gegeven punt. Vervolgens deele men den nieuwen driehoek middendoor.

Vraagstuk 9. Een gegeven bolvierhoek in twee gelijke deelen te verdeelen door een lijn uit een punt, in één der zijden gegeven.

Oplossing. Men deele eerst den bolvierhoek middendoor door een lijn uit één zijner hoekpunten. Daarna moet men nog een driehoek construeeren gelijk aan een gegeven driehoek en op een zelfde basis staande.

Eigenschap. De groote cirkels door de hoekpunten, die de oppervlakte van een boldriehoek halveeren, snijden elkaar in een punt. (Steiner) (fig. 23d).

Bewijs.

De punten A_1, B_1, a en b liggen in één plat vlak. Evenzoo de punten A_1, C_1, a, c, alsmede B_1, C_1, b en c. Deze **3** vlakken vormen een drievlakshoek met de ribben $A_1\,a$, $B_1\,b$ en $C_1\,c$. De vlakken der groote cirkels $A a A_1$, $B\,b\,B_1$ en $C\,c\,C_1$ snijden dus elkaar, behalve in het middelpunt van den bol, nog in het hoekpunt van genoemden drievlakshoek. Ze snijden elkaar dus volgens een middellijn van den bol. Derhalve hebben deze groote cirkels slechts 2 punten gemeen.

(Wat leert hier de poolfiguur?)

§ **25. Eigenschap. Wanneer de mediaan AD van een boldriehoek ABC een kwadrant is, dan is AD tevens bissectrix van hoek A, en zijn de zijden om die mediaan elkaars supplement.**

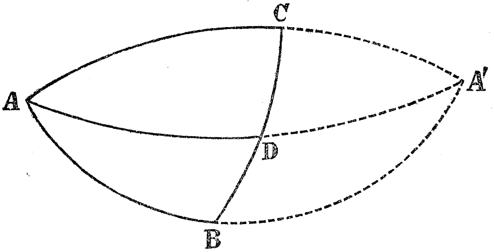


Fig. 24.

Bewijs.

Zij van $\triangle ABC$ (fig. 24) de mediaan AD gelijk 90°, dan moeten wij bewijzen:

$$\angle CAD = \angle BAD,$$

en $AB + AC = 180°$.

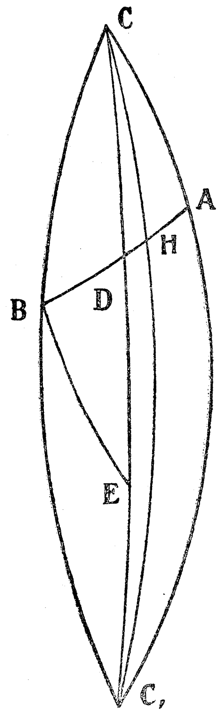
Verlengt men AD met een boog $DA' = AD$, dan is A' het tegenpunt van A, waardoor ook de verlegden van AB en AC gaan. De driehoeken ADC en $AD'B$ hebben nu gelijk:

$$AD = A'D,$$
$$CD = BD.$$
$$\angle\ ADC = \angle\ A'DB.$$

Zij zijn dus gelijk en gelijkvormig. Hieruit volgt, dat

$$\angle\ DAC = \angle\ DA'B.$$

Maar $\angle$ DA'B $=$ $\angle$ DAB (waarom?), dus $\angle$ DAC $=$ $\angle$ DAB, m. a. w., AD is bissectrix van $\angle$ A.



24a.

Uit de gelijk- en gelijkvormigheid der beschouwde driehoeken volgt ook:

$$A'B = AC,$$

en daar $\quad A'B + AB = 180°,$

is ook $\quad AB + AC = 180°.$

De zijden AB en AC zijn dus elkaars supplement.

Aan den lezer wordt overgelaten het bewijs van de

Eigenschap. Wanneer twee zijden van een boldriehoek elkaars supplement zijn, is de mediaan naar de derde zijde een kwadrant, en tevens bissectrix.

§ 25. A. **Eigenschap. Zij m_c de mediaan naar de zijde AB in den boldriehoek ABC dan is**

$$m_c \gtreqless \frac{a+b}{2}$$

naar mate men heeft $a + b \gtreqless 180°$ (fig. 25).

Bewijs.

Zij ABC de driehoek en CD de mediaan. Als $a + b < 180°$ is, heeft men ook $A + B < 180°$. Verleng CD met zich zelf tot in E en verbind E met B, dan is de driehoek BDE congruent met driehoek ADC en BE $=$ AC. Dus:

$$2\ m_c < BE + BC.$$
$$2\ m_c < a + b.$$
$$m_c < \frac{a+b}{2}$$
$$\text{ook } m_c < 90°.$$

Als $a + b = 180°$, heeft men ook $A + B = 180°$. BE moet dan vallen langs BC′ (C′ het tegenpunt van C). Dus:

$$2\ m_c = BE + BC$$
$$2\ m_c = a + b$$
$$m_c = \frac{a+b}{2}$$
$$\text{ook } m_c = 90°.$$

Als $a + b > 180°$ is, heeft men in den nevendriehoek ABC′

$$180° - m_c < \frac{180° - a + 180° - b}{2}$$
$$m_c > \frac{a+b}{2}$$
$$\text{ook } m_c > 90°.$$

§ 25. B. **Eigenschap. Zij d_c de bissectrix naar de zijde AB in boldriehoek ABC, dan is**

$$d_c \gtreqless m_c \text{ of } d_c \gtreqless \frac{a+b}{2}$$

naar mate men heeft

$$a + b \gtreqless 180° \quad \text{(fig. 24a)}.$$

Bewijs.

Zij $a > b$. Is $a + b < 180°$, dan zal $\angle$ CEB $> \angle$ BCE zijn of $\angle$ BCE $< \angle$ ACE en de bissectrix CH ligt dan tusschen CD en CA. De driehoeken BDC en ADC hebben 2 zijden gelijk, maar de 3^de^ zijde ongelijk. Dus $\angle$ BDC $> \angle$ ADC of $\angle$ ADC is scherp.

Neemt men op CB een punt A_1 zóó, dat $CA_1 = CA$ en verbindt men A_1 met A, dan blijkt onmiddellijk uit de gelijk en gelijkvormigheid der driehoeken ACH en A_1CH, dat $\angle$ AHC $< \angle$ BHC is. Daarom is $\angle$ BHC stomp. In driehoek CDH is nu

$$CH < CD.$$
$$d_c < m_c$$
$$\text{ook } d_c < \frac{a+b}{2}$$

Is $a + b = 180°$, dan is $A + B$ ook $180°$, daar de mediaan dan blijkens het voorgaande bewijs den $\angle$ C halveert valt de bissectrix langs de mediaan. Men heeft dus:

$$d_c = m_c = \frac{a+b}{2}.$$

Is echter $a + b > 180°$, dan heeft men in den nevendriehoek ABC′

$$180^\circ - d_c < 180^\circ - m_c$$
$$d_c > m_c$$
$$\text{ook } d_c > \frac{a+b}{2}$$

Zijn de zijden a en b gelijk, dan geldt voor de bissectrix hetzelfde als voor de mediaan.

(Visschers, Mathesis 1909, 1914).

§ **26. Eigenschap. De groote cirkel door de middens D en E der zijden BC en AC van boldriehoek ABC snijdt de basis AB in punten P en P′, die op spherische afstanden van 90° van het midden F van de basis liggen.**

Eerste bewijs.

Zij (fig. 25) ABC′ een nevendriehoek van ABC. De middelloodlijnen FO, LO en MO van dezen driehoek gaan door één punt O. Hieruit volgt, dat de polen dezer middelloodlijnen op den grooten cirkel liggen, waarvan O een pool is. (Zie § 5, opmerking). Nu zijn, als PF = P′F = 90°, P en P′ de polen van FO, D is een pool van MO, en E van LO. Derhalve liggen P, P′, D en E op den grooten cirkel, waarvan O een pool is.

Om het groote belang van deze eigenschap volgt hier een

Tweede bewijs.

Zij O een pool van DE. Breng groote cirkels door O en A, O en B, O en C, dan staan deze cirkels in G, K en H loodrecht op ED. In boldriehoek OAC is de mediaan OE gelijk 90°, dus volgens § 25 is

$$OA + OC = 180^\circ;$$

en omdat OG = OH = 90°, is AG = CH. Op soortgelijke wijze blijkt, dat BK = CH. Men heeft dus

$$AG = BK.$$

Hieruit volgt weer, dat

$$OA = OB,$$

dus ook

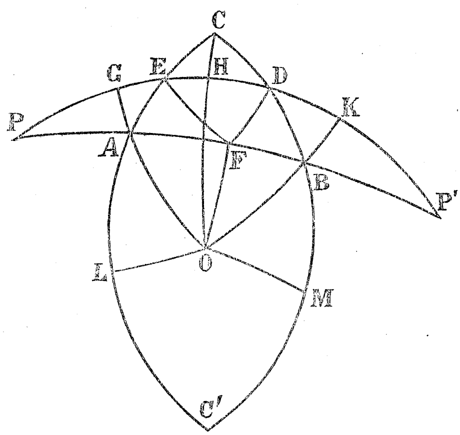


Fig. 25.

$$\angle OAB = \angle OBA,$$
$$\text{dus } \angle PAG = \angle P'BK.$$

De driehoeken PAG en P′BK zijn nu gelijk en gelijkvormig (§ 11, 1[e]), waaruit volgt

$$AP = BP',$$

en omdat $AF = FB$,

is $PF = P'F = 90°$.

Opmerkingen.

1. $2 \angle EOD = \angle AOB$ (OE is bissectrix in $\triangle OAC$!)
2. $\angle GAB = \angle KBA = S$, als S de halve som der hoeken is.
3. $\angle GAP = \angle KBP' = 90° - \frac{1}{2} E$, als E het spherisch exces is.
4. $\angle GAE = S - A$, $\angle KBD = S - B$.
5. $PG + ED = P'K + ED = 90°$.

§ **27. Eigenschap. De hoogtelijnen van een boldriehoek gaan door één punt.**

Bewijs.

In de vorige paragraaf hebben we gezien, dat F het midden is van den halven cirkelomtrek PABP′. De spherische loodlijn uit F op ED zal dus ook loodrecht staan op AB, m.a.w., de hoogtelijn uit F van $\triangle$ DEF is de middelloodlijn van de zijde AB van $\triangle$ ABC. Omdat nu de middelloodlijnen van $\triangle$ ABC door één punt gaan, is dit ook het geval met de hoogtelijnen van $\triangle$ DEF.

Opmerking. Men kan deze eigenschap ook bewijzen door middel van den drievlakshoek aan het middelpunt van den bol.

§ **27.** A. **Eigenschap. De hoogtelijnen van een boldriehoek zijn de bissectrices van zijn voetpuntendriehoek.**

Zij MABC een drievlakshoek met het hoekpunt M in het middelpunt van den bol. Indien nu Ma, Mb, Mc de projecties zijn van de ribben MA, MB, MC op de overstaande zijden, dan zijn die projecties de ribben van een nieuwen drievlakshoek, wiens hoeken door de loodvlakken MAa, MBb, MCc worden middendoor gedeeld. Om dit te bewijzen beginne men met een standvlak aan te brengen, bij voorbeeld op de ribbe MA enz. Vervolgens denke men zich bij alles de bolfiguur.

§ **28. Bepaling.** *De* **vlakke** *driehoek, waarvan de hoekpunten samen vallen met die van den boldriehoek ABC, heet de* **koordedriehoek** *van boldriehoek ABC.*

Eigenschap. Als A′BC een nevendriehoek is van boldriehoek ABC, dan zal de boog DE, die de middens van A′B en A′C verbindt, gelijk zijn aan hoek A van den koordedriehoek ABC.

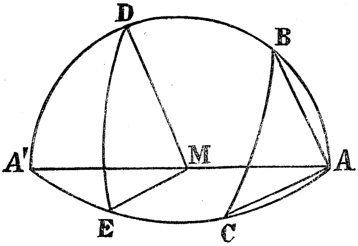


Fig. 26.

Bewijs.

Verbindt het middelpunt M van den bol door stralen met D en E (fig. 26). Omdat $\angle BAA' = \frac{1}{2}$ boog $A'B =$ boog $A'D$, en $\angle DMA' =$ boog $A'D$, loopt MD // AB.

Om dezelfde reden is ME // AC, derhalve

$$\angle DME = \angle BAC,$$

dus ook boog $DE = \angle BAC$.

§ **29. Bepalingen.** *Een* **bolveelhoek** *is een deel van een boloppervlak, dat begrensd wordt door bogen van groote cirkels, die kleiner dan 180° zijn.* (Een uitzondering maakt de boltweehoek).

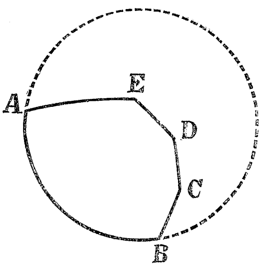


Fig. 27.

Wanneer men den grooten cirkel beschouwt, waarvan een zijde van een bolveelhoek een deel is, dan kunnen zich twee gevallen voordoen: de veelhoek ligt geheel op een der beide bolhelften, waarin de beschouwde groote cirkel het boloppervlak verdeelt (fig. 27), òf hij ligt op beide bolhelften (fig. 28). Doet zich het eerste geval voor bij elke zijde van den veelhoek, dan heet hij **convex.** In alle andere gevallen heet hij **concaaf.**

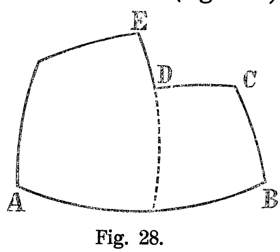


Fig. 28.

De bolveelhoeken worden genoemd naar het aantal zijden; zoo spreekt men van boldriehoeken, — vierhoeken, — *n*-hoeken.

Met bolveelhoek wordt in het vervolg steeds de **convexe bolveelhoek** bedoeld.

§ **30. Eigenschap. De omtrek van een convexen bolveelhoek is kleiner dan de omtrek van een grooten cirkel.**

Bewijs.

Zij in fig. 29 ABCD een convexe bolvierhoek. Als de overstaande zijden AB en CD elkaar in de tegenpunten E en E′ snijden dan is

$$EA + AB + BE' + ED + DC + CE' = 360^\circ.$$

Omdat $EA + ED > AD,$

en $E'B + E'C > BC,$

is $AB + BC + CD + DA < 360^\circ,$

waarmede de eigenschap is aangetoond voor een bolvierhoek. Door herhaalde toepassing van deze eigenschap blijkt de stelling door te gaan voor alle convexe bolveelhoeken.

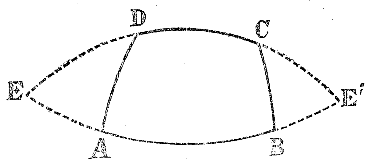


Fig. 29.

§ **31. Eigenschap. De som der hoeken van een bol-*n*-hoek is grooter dan *n* — 2 gestrekte hoeken.**

Bewijs.

Verbindt men een punt P binnen den veelhoek met de hoekpunten door bogen van groote cirkels, dan ontstaan *n* boldriehoeken. De som der hoeken dezer driehoeken is grooter dan *n* gestrekte hoeken. De som der hoeken om het punt P is gelijk aan 2 gestrekte hoeken; derhalve is de som der hoeken van den bol-*n*-hoek grooter dan $n - 2$ gestrekte hoeken.

Bepaling. *Onder het* **spherisch exces** (E) *van een bol-n-hoek verstaat men het verschil van de som der hoeken en n — 2 gestrekte hoeken.*

Volgens deze bepaling is dus het spherisch exces van een bol-*n*-hoek gelijk aan de som zijner hoeken, verminderd met de som der hoeken van een *vlakken n*-hoek.

§ **32. Eigenschap. Het oppervlak van een bol-*n*-hoek staat tot de oppervlakte van den bol als zijn spherisch exces tot 720°.**

Bewijs.

Verbindt men een punt P binnen den veelhoek met de hoekpunten door bogen van groote cirkels, en zijn $o_1, o_2, \ldots . o_n$ de oppervlakken dezer driehoeken, $E_1, E_2, \ldots . E_n$ hun spherische excessen, dan is, als r de straal van den bol voorstelt

$$o_1 : 4\pi r^2 = \mathrm{E}_1 : 720^\circ,$$
$$o_2 : 4\pi r^2 = \mathrm{E}_2 : 720^\circ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$o_n : 4\pi r^2 = \mathrm{E}_n : 720^\circ.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{o_1 + o_2 + \ldots + o_n}{4\pi r^2} = \frac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots + \mathrm{E}_n}{720^\circ}.$$

Is nu O de oppervlakte van den bol-n-hoek, en E zijn spherisch exces, dan wordt de laatste evenredigheid

$$\frac{\mathrm{O}}{4\pi r^2} = \frac{\mathrm{E}}{720^\circ}.$$

§ **33. Poolveelhoeken.**

Bepaalt men van elke zijde van een convexen bolveelhoek de pool, die op dezelfde bolhelft ligt als de gegeven veelhoek, dan vormen deze polen de hoekpunten van een tweeden bolveelhoek, die de **poolveelhoek** van den eersten genoemd wordt.

Omtrent een bolveelhoek en zijn poolveelhoek gelden de volgende **Eigenschappen. Als een bolveelhoek A'B'C'D' . . . . de poolveelhoek van ABCD . . . . is, dan is ABCD . . . . de poolveelhoek van A'B'C'D' . . . .**

De zijden van een bolveelhoek zijn de supplementen der hoeken van den poolveelhoek.

De hoeken van een bolveelhoek zijn de supplementen der zijden van den poolveelhoek.

Deze stellingen worden op dezelfde manier bewezen als de gelijknamige eigenschappen van den boldriehoek en zijn pooldriehoek.

§ **34.** Soms kan men eigenschappen van bolvierhoeken afleiden uit eigenschappen van viervlakken.

Hier volgt een voorbeeld.

Eigenschap. De groote cirkels, die de middens der overstaande zijden en der diagonalen van een bolvierhoek verbinden, gaan door één punt.

Bewijs.

Is ABCD een bolvierhoek, dan is het lichaam, dat ontstaat door verbinding der hoekpunten twee aan twee door rechte lijnen, een viervlak. Volgens een bekende eigenschap gaan de verbindingsrechten van de middens der overstaande ribben door één punt Z, het zwaartepunt van het viervlak. Elk vlak door het middelpunt van den bol en een dezer verbindingsrechten snijdt het boloppervlak volgens een grooten cirkel, die gaat door de middens van twee overstaande zijden of van de diagonalen van den bolvierhoek.

Deze verbindingsbogen snijden elkaar dus in het punt, waarin de bolstraal door Z het boloppervlak ontmoet.

§ **35. Bepaling.** *Als de hoekpunten van een bolvierhoek op den omtrek van een kleinen cirkel van den bol liggen, heet die vierhoek een* **bolkoordenvierhoek.**

Eigenschap I. De sommen der overstaande hoeken van een bolkoordenvierhoek zijn gelijk.

Bewijs.

Zij ABCD een bolkoordenvierhoek (fig. 30), waarvan M de pool van den omgeschreven cirkel is. Verbindt men M door spherische stralen met A, B, C en D, dan ontstaan vier gelijkbeenige boldriehoeken.

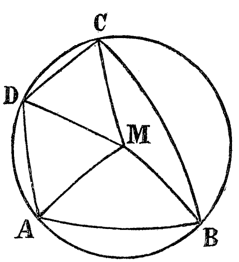


Fig. 30.

Daarom is
$$\begin{aligned} \angle MAB &= \angle MBA, \\ \angle MAD &= \angle MDA, \\ \angle MCB &= \angle MBC, \\ \angle MCD &= \angle MDC, \end{aligned}$$
op
$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

Eigenschap II. Als de sommen der overstaande hoeken van een bolvierhoek gelijk zijn, dan is die vierhoek een bolkoordenvierhoek.

Bewijs.

Laat van den vierhoek ABCD (fig. 31) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$ zijn. Maak $\angle EAB = \angle B$, verleng BC en maak $\angle GDC = \angle GCD$; er ontstaan dan drie gelijkbeenige driehoeken, nl. ABE, CDG en ADF. De laatste is gelijkbeenig, omdat uit

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$ volgt, dat

$\angle A - \angle B = \angle D - \angle C$,

of $\angle DAF = \angle ADF$.

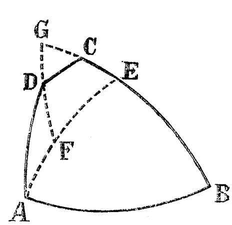


Fig. 31.

Van den boldriehoek GEF gaan de bissectrix van $\angle G$ en de buitenbissectrices der andere hoeken door één punt. De bissectrix van $\angle$ G is tevens middelloodlijn van CD, de andere bissectrices zijn middelloodlijnen van AB en AD. Hieruit volgt, dat de middelloodlijnen van AB, AD en DC door één punt gaan. Dit punt is dus spherisch evenver van A, B, C en D verwijderd, en kan dus als pool van een cirkel beschouwd worden, gaande door de hoekpunten van den vierhoek. Derhalve is ABCD een bolkoordenvierhoek.

Aan den lezer wordt nu overgelaten het bewijs van

Eigenschap III. Als de hoekpunten van een bolvierhoek niet op een kleinen cirkel liggen, dan zijn de sommen der overstaande hoeken niet gelijk.

Eigenschap IV. Als de sommen der overstaande hoeken van een bolvierhoek niet gelijk zijn, dan kan om dien vierhoek geen cirkel beschreven worden.

§ **36. Bepaling.** *Als de zijden van een bolvierhoek raken aan een kleinen cirkel, heet die vierhoek een* **bolraaklijnenvierhoek.**

Eigenschap I. De sommen der overstaande zijden van een bolraaklijnenvierhoek zijn gelijk.

Bewijs.

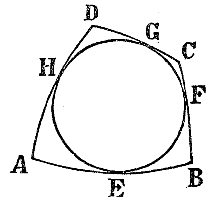


Fig. 32.

Zijn in fig. 32 E, F, G en H de raakpunten, dan is

$$AE = AH,$$
$$BE = BF,$$
$$CG = CF,$$
$$DG = DH,$$
$$\overline{} \text{ op}$$
$$AB + CD = AD + BC.$$

Eigenschap II. Als de sommen der overstaande zijden van een bolvierhoek gelijk zijn, dan is die vierhoek een bolraaklijnenvierhoek.

Bewijs.

Zij in fig. 33 $\quad AB + CD = AD + BC$, dan is ook

$$AB - BC = AD - CD.$$

Maak nu BE = BC, en DF = DC, dan is AB — BC = AE, AD — CD = AF, zoodat AE = AF. Er zijn nu drie gelijkbeenige boldriehoeken ontstaan. De bissectrices der tophoeken zijn middelloodlijnen der basissen, en omdat de middelloodlijnen van driehoek CEF door één punt gaan, is dit ook hetgeval met de bissectrices der boeken A, B en D. Het snijpunt dezer bissectrices is dus

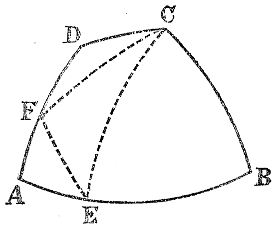


Fig. 33.

evenver van de zijden van den bolvierhoek verwijderd en kan daarom beschouwd worden als pool van een cirkel, die de zijden van den vierhoek raakt. Derhalve is ABCD een bolraaklijnenvierhoek.

Aan den lezer wordt nu overgelaten het bewijs van

Eigenschap III. Als de zijden van een bolvierhoek niet raken aan een kleinen cirkel, dan zijn de sommen der overstaande zijden niet gelijk.

Eigenschap IV. Als de sommen der overstaande zijden van een bolvierhoek niet gelijk zijn, dan kan in dien vierhoek geen cirkel beschreven worden.

STEREOGRAPHISCHE PROJECTIE.

§ **37. Bepalingen.** Zij in fig. 34 MO een bol met M tot middelpunt, MPQ een vlak door het middelpunt loodrecht op den straal MO. Is AB een kromme lijn op het bolvlak, dan zal het kegeloppervlak, waarvan O de top, en de kromme AB richtlijn is, het vlak PMQ in het algemeen volgens een kromme CD snijden, die de **stereographische projectie** van AB genoemd wordt.

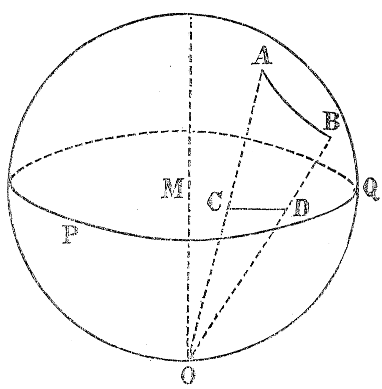


Fig. 34.

O heet het **projectiecentrum,** het vlak MPQ heet **projectievlak.**

Het projectievlak verdeelt het boloppervlak in een onderste helft, waarop het projectiecentrum ligt, en een bovenste helft. Alle figuren op de bovenste helft projecteeren zich binnen den cirkelomtrek PQ, alle figuren op de onderste helft er buiten. De cirkelomtrek PQ valt samen met zijn projectie.

§ 38. **Eigenschap. Als A′ en B′ de stereographische projecties van A en B zijn, dan loopen de rechten AB en A′B′ antiparallel ten opzichte van de beenen van den hoek AOB.**

Bewijs.

Is in fig. 35 O′ het tegenpunt van O, dan zijn de hoeken OAO′ en OMA′ recht, zoodat MA′AO′ een koordenvierhoek is. Daarom is

$$OA' \times OA = OM \times OO'.$$

Evenzoo is

$$OB' \times OB = OM \times OO'.$$

Hieruit volgt, dat

$$OA' \times OA = OB' \times OB.$$

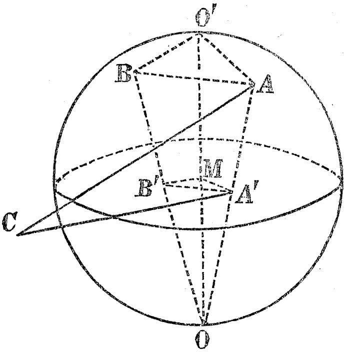


Fig. 35.

De driehoeken OAB en OB′A′ zijn dus gelijkvormig, zoodat

$$\angle OAB = \angle OB'A',$$

en $$\angle OBA = \angle OA'B'.$$

Opmerking. Beweegt B zich langs een willekeurige kromme op den bol naar A, om ten slotte met A samen te vallen, dan valt B′ samen met A′. BA gaat dan over in een raaklijn CA aan den bol. Daar de boven bewezen eigenschap dan nog geldt, heeft men:

$$CA = CA'.$$

§ 39. **Eigenschap. De hoek van twee kromme lijnen op een bolvlak is gelijk aan den hoek van hun stereographische projecties.**

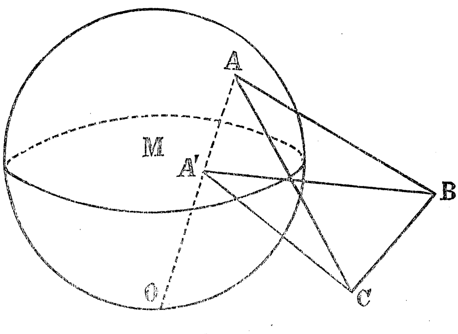


Fig. 36.

Bewijs.

Maken de krommen op den bol een hoek BAC (fig. 36), hun projecties een hoek BA′C, dan is volgens de voorgaande paragraaf

$$BA = BA', \quad CA = CA'.$$

De driehoeken ABC en A′BC zijn dus congruent.

Daarom is $\angle BAC = \angle BA'C$.

§ 40. **Eigenschap. De stereographische projectie van een cirkel, die niet door het projectiecentrum gaat, is weer een cirkel.**

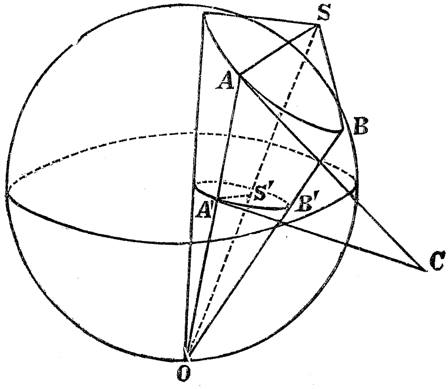


Fig. 37.

Bewijs.

Zij AB een kleine cirkel op den bol en S de top van den kegel, die den bol omhult volgens den kleinen cirkel AB. Is SA een beschrijvende lijn van den kegel, en AC de raaklijn in A aan den cirkel, dan is $\angle$ SAC $= 90°$.

Is S′A′C de projectie van $\angle$ SAC, dan is volgens de voorgaande paragraaf ook

$$\angle S'A'C = 90°.$$

Omdat nu de raaklijn CA′ aan de projectie steeds loodrecht staat op de lijn, die A′ met het vaste punt S′ verbindt, is de projectie een cirkel met S′ als middelpunt.

Opmerkingen. 1. De eigenschap blijft gelden, als cirkel AB een groote cirkel is.

2. *De stereographische projectie van een cirkel, die door het projectiecentrum gaat, is een rechte lijn.*

§ 41. Stereographische projectie van een boldriehoek. Meetkundige voorstelling van het spherisch exces.

Uit de voorgaande paragrafen volgt, dat de stereographische projectie van een boldriehoek in het algemeen een figuur is, die ingesloten wordt door drie cirkelbogen. Bij een bepaalde ligging van een der hoekpunten wordt de projectie eenvoudiger.

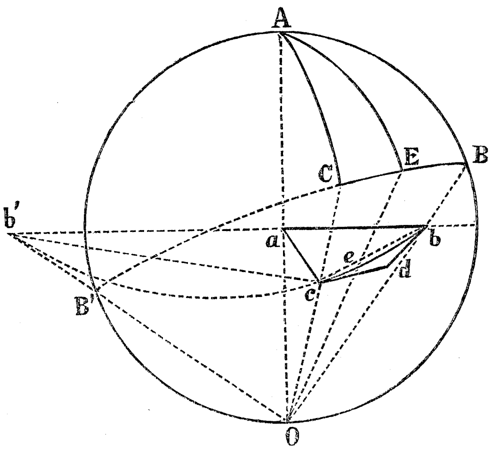


Fig. 38.

Legt men nl. (fig. 38) het hoekpunt A in het tegenpunt van het projectiecentrum O, dan zijn de projecties der zijden AB en AC rechte lijnen *ab* en *ac*, terwijl de projectie van BC een cirkelboog *bc* is.

Snijden de raaklijnen in b en c aan dien boog elkaar in d, dan is $\angle A = \angle bac$, $\angle B = \angle abd$, $\angle C = \angle acd$.

Het spherisch exces E van boldriehoek ABC is dus gelijk aan

$$\begin{aligned} A + B + C - 180^\circ &= bac + abd + acd - 180^\circ \\ &= (360^\circ - bdc) - 180^\circ = 180^\circ - bdc, \end{aligned}$$

en omdat $db = dc$ is, heeft men

$$E = 180^\circ - bdc = 2 \angle cbd = \text{boog } bc.$$

of in woorden:

Als men het tegenpunt van hoekpunt A van boldriehoek ABC als projectieecentrum kiest, stelt de stereographische projectie der zijde BC het spherisch exces voor.

Deze eigenschap geeft een eenvoudig middel aan de hand, om met behulp van stereographische projectie de oppervlakte van een boldriehoek te halveeren. Is nl. e het midden van boog bc, en snijdt Oe den boog BC in E, dan zal de groote cirkel door A en E de oppervlakte van boldriehoek ABC middendoor deelen.

Opmerking. Is b' de projectie van het tegenpunt B' van B, dan is de cirkelboog bcb' de projectie van den halven grooten cirkel BCB'. Trekt men de koorde $b'c$, dan is

$$\angle bb'c = \tfrac{1}{2} \text{ boog } bc = \tfrac{1}{2} E.$$

Bepalen wij nu de m.p. van het toppunt C van boldriehoek ABC, als de basis AB en het oppervlak constant zijn.

Omdat van den hoek $bb'c$ het been bb' niet van ligging verandert, en $\angle bb'c = \frac{1}{2} E$ constant moet blijven, is de m.p. van c de rechte lijn $b'c$. De m.p. van C is dus de cirkelomtrek, volgens welke het vlak $Ob'c$ den bol doorsnijdt. Deze cirkelomtrek is een kleine cirkel door O en B', dus door de tegenpunten van A en B. Wij vinden langs dezen weg den bekenden cirkel van Lexell terug.

§ 42. De maximumwaarde van het oppervlak van een boldriehoek te bepalen, als twee zijden constante lengte hebben.

Laten in fig. 38 de zijden AB en AC constante lengte hebben. Heeft AB een vaste ligging, dan is de m.p. van C een kleine cirkel uit A als pool, en die van c een cirkel in het projectievlak uit a als middelpunt. Daar het oppervlak een maximum moet worden, hebben wij na te gaan, wanneer de hoek $ab'c$ zijn grootste waarde bereikt. Dit is het geval, als $b'c$ raakt aan den cirkel uit a als middelpunt met ac als straal beschreven, m.a.w., als $\angle b'ca = 90^\circ$ is.

Dan is $\angle\, b'ac + \angle\, ab'c = 90°$,

of $180° - A + \frac{1}{2}E = 90°$,

$A = 90° + \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}(180° + E) = \frac{1}{2}(A + B + C)$,

of $A = B + C$, dus:

De oppervlakte van een boldriehoek, waarvan twee zijden een constante lengte hebben, is zoo groot mogelijk, als de door die zijden ingesloten hoek gelijk is aan de som der beide andere hoeken.

Opmerking. Uit het antwoord blijkt, dat men in de onderzochte boldriehoeken hebben moet $b + c < 180°$.

§ 43. Vraagstukken.

1. In een rechthoekigen boldriehoek is de som der hoeken kleiner dan 360°, en het verschil der hoeken aan de schuine zijde is kleiner dan 90°. Bewijs dit. (Pas § 16 toe op den pooldriehoek).
   In een rechtzijdigen boldriehoek is het verschil van de niet-rechte zijden kleiner dan 90°. Bewijs.
   Tusschen welke grenzen ligt het spherisch exces van een rechthoekigen boldriehoek?
2. Van een rechthoekigen gelijkbeenigen boldriehoek is de oppervlakte $\frac{1}{15}$ van het boloppervlak. Bereken de hoeken van dien driehoek. (§ 23).
3. Als 2S de som der hoeken, en $2s$ de som der zijden van een boldriehoek is, dan heeft die driehoek dezelfde oppervlakte als zijn pooldriehoek, als
   $$S + s = 270°.$$
4. Als twee boldriehoeken twee zijden gelijk hebben, maar de ingesloten hoek in den eersten driehoek grooter is dan die in den tweeden, dan is de derde zijde van den eersten driehoek grooter dan die van den tweeden. Bewijs dit. Bewijs ook het omgekeerde.
5. Men verbindt een punt P binnen een boldriehoek ABC met de hoekpunten door groote cirkels. Bewijs dat
   $$s < PA + PB + PC < 2s,$$
   wanneer $2s$ de omtrek van den driehoek is. (§ 16).
6. Als de drie zijden van een boldriehoek scherp zijn, is elke mediaan kleiner dan de halve som, maar grooter dan het halve verschil der omliggende zijden, terwijl de som der medianen kleiner dan de omtrek van den driehoek is.

Als de drie zijden stomp zijn, is elke mediaan grooter dan de halve som der omliggende zijden, terwijl de som der medianen grooter is dan de omtrek.

7. Van boldriehoek ABC is $a + b - c = 180°$. Men past op BC een stuk BD $= c$ en op AC een stuk AE $= c$ af. Bewijs, dat AD en BE bissectrices van $\triangle$ ABC zijn en dat deze bissectrices loodrecht op elkaar staan.

8. Van een boldriehoek is de basis constant in ligging en grootte, terwijl de som der opstaande zijden 180° is. Bepaal de m.p. van den top. (§ 25).

9. Op een bol zijn gegeven een groote cirkel en twee punten A en B aan dezelfde zijde van dien cirkel. Bepaal op dezen cirkel een punt C zoo, dat de omtrek van boldriehoek ABC een maximum of minimum wordt.

10. AB′C en A′BC zijn nevendriehoeken van ABC. Bewijs, dat de middens van AC, BC, AB′ en A′B op een grooten cirkel liggen. (§ 26).

11. Bepaal de m.p. van de toppen der boldriehoeken, die gegeven basis en gegeven hoogte hebben.

12. Twee rechthoekige boldriehoeken ABC en ADC hebben een gemeenschappelijke schuine zijde AC. AB en CD snijden elkaar in E. AD en BC elkaar in F. Bewijs, dat AC loodrecht op EF staat. (§ 27).

13. Van een rechthoekigen boldriehoek ABC is $\angle$ C $= 90°$. Men verlengt BA en CA door het hoekpunt A met stukken AD en AE zoo, dat de bogen BD en CE kwadranten zijn. E en D worden verbonden door een grooten cirkel. Bewijs, dat $\triangle$ ADE rechthoekig is, en druk de elementen van dien driehoek uit in a, b, c, A en B.

14. Op een der zijden van een boltweehoek is een punt A gegeven. Bepaal op dezelfde zijde een punt B en op de andere zijde een punt C zoo, dat de omtrek van $\triangle$ ABC 180° is.

15. Als de omtrek van een boldriehoek 180° is, vormen de buitenbissectrices een driehoek, waarvan alle zijden en hoeken 90° zijn.

16. Van $\triangle$ PQR zijn alle zijden en hoeken 90°. Op PQ ligt een punt A. Men verlengt AP met een boog PD $=$ AP en brengt door D en een willekeurig punt B van RQ een grooten cirkel, die PR in C snijdt. Bewijs, dat de omtrek van $\triangle$ ABC 180° is.

Construeer daarna een grooten cirkel door D zoo, dat $\triangle$ ABC rechthoekig in A is.

17. Van een boldriehoek zijn de basis AB en de oppervlakte constant. Bewijs, dat
   1e de m.p. van de middens der opstaande zijden een boog van een grooten cirkel is.
   2e de boog, die de middens der opstaande zijden verbindt, constant is. (§ 26).

18. Bewijs, dat in een rechthoekigen boldriehoek elke rechthoekszijde gelijksoortig is met den overstaanden scheeven hoek. (Met gelijksoortig wordt bedoeld: òf beide scherp, òf beide stomp).

18*bis*. Bewijs met behulp der voorgaande eigenschap dat in boldriehoek ABC de hoogtelijn uit C op AB binnen of buiten den driehoek valt al naar A en B gelijksoortig of ongelijksoortig zijn.

19. De som van de spherische loodlijnen, uit een punt, dat op het bolloppervlak binnen een rechten boltweehoek gelegen is, neergelaten op de zijden van dien boltweehoek, is in het algemeen kleiner dan 90°, tenzij het punt op den boog van den grooten cirkel ligt, die de middens der zijden verbindt. Men vraagt het bewijs van deze eigenschap. (Acte-examen Wisk. L.O. 1906).

20. Bepaal de m.p. van den top A van een boldriehoek ABC, als a en S — A constant zijn. (§ 24).

21. Van een boldriehoek ABC is $\angle C = \angle A + \angle B$. Bewijs:
   1e dat de mediaan uit C gelijk is aan de helft van AB;
   2e dat de koordedriehoek rechthoekig is;
   3e dat de middens der zijden de hoekpunten van een rechthoekigen boldriehoek zijn;
   4e dat in den nevendriehoek ABC′ de som der hoeken 360° is, en dat in de andere nevendriehoeken een hoek gelijk is aan het verschil der beide andere;
   5e dat, als A′ en B′ de tegenpunten van A en B zijn, de middens van A′B, A′C, AB′ en B′C op een grooten cirkel liggen, waarvan het midden van AB een pool is;
   6e dat, als AB vast is in ligging en grootte, de m.p. van C een cirkel is.

22. Van een boldriehoek ABC is de som der hoeken 360°. AD, BE en CF zijn de medianen, die elkaar in Z snijden. A′, B C′ zijn de tegenpunten van A, B en C. Bewijs:
   1e in elk der nevendriehoeken is één hoek gelijk aan de som der beide andere;

2^e de medianen zijn de supplementen van de helften der zijden, waarop ze staan; elke mediaan verdeelt een hoek in deelen, die gelijk zijn aan de supplementen der andere hoeken, (n°. 21);

3^e van $\triangle$ DEF zijn de zijden en de hoeken alle 90° (§ 25);

4^e de driehoeken AFE en ZFE, alsmede BFD en ZFD, CDE en ZDE zijn symmetrisch; leidt hieruit af, dat de oppervlakte van $\triangle$ ABC $\frac{1}{4}$ deel van het boloppervlak is;

5^e de omgeschreven cirkels der nevendriehoeken gaan door Z.

23. M en M′ zijn de polen der omgeschreven cirkels van $\triangle$ ABC en den nevendriehoek ABC′. Bewijs, dat

$$\angle \mathrm{MAM'} = \angle \mathrm{MBM'} = 180^\circ - \mathrm{C}.$$

24. M is de pool van den omgeschreven cirkel, CD is een bissectrix van $\triangle$ ABC. Bewijs, dat

$$\angle \mathrm{DCM} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{B}).$$

25. A′B′C is een topdriehoek van boldriehoek ABC. Door de tegenpunten A en A′ brengt men een grooten cirkel, die den omgeschreven cirkel van A′B′C in A′ raakt. Bewijs, dat deze groote cirkel met de basis AB een hoek maakt gelijk aan $\frac{1}{2}$ E.

26. Van boldriehoek ABC zijn A′BC, AB′C, ABC′ de nevendriehoeken. De polen der omgeschreven cirkels dezer driehoeken zijn M, M_a, M_b, M_c. D, E en F zijn de middens van BC, CA en AB. Bewijs:

1^e de middens van A′B, A′C, B′C, B′A, C′A, C′B liggen op den grooten cirkel, waarvan M een pool is. (§ 26);

2^e deze groote cirkel wordt door de zijden van de nevendriehoeken in zes deelen verdeeld, waarvan drie niet opeenvolgende samen 180° zijn, (§ 28);

3^e de driehoeken DEF en $\mathrm{M}_a\mathrm{M}_b\mathrm{M}_c$ zijn elkaars pooldriehoeken, (§ 26);

4^e M is het hoogtepunt van $\triangle$ $\mathrm{M}_a\mathrm{M}_b\mathrm{M}_c$.

27. Als M de pool van den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABC is, dan maken de spherische stralen MA en MB met elkaar een hoek, die tweemaal zoo groot is als hoek C van den koordedriehoek.

28. Als de omtrek van een boldriehoek 180° is, wordt elke zijde door het raakpunt van den ingeschreven cirkel in stukken verdeeld, die de complementen der andere zijden zijn. De inge-

schreven cirkel van den nevendriehoek A'BC raakt de verlengden der zijden AB en AC in punten, die spherisch 90° van A liggen.

29. Van een boldriehoek ABC is de spherische straal van den ingeschreven cirkel 45°. Deze cirkel raakt BC, CA en AB in D, E en F. Bewijs, dat de elementen van boldriehoek DEF de supplementen van die van driehoek ABC zijn.

30. Van een boldriehoek ABC is de spherische straal van den omgeschreven cirkel 45°. De groote cirkels, die in A, B en C aan dien cirkel raken, vormen een boldriehoek PQR. Bewijs, dat de elementen van dezen driehoek de supplementen van die van $\triangle$ ABC zijn.

31. Bewijs:
1. De pool van den ingeschreven cirkel van een boldriehoek valt samen met de pool van den omgeschreven cirkel van den pooldriehoek. De spherische stralen dezer cirkels zijn elkaars complement.
2. De pool van den omgeschreven cirkel van een boldriehoek valt samen met de pool van den ingeschreven cirkel van den pooldriehoek. De spherische stralen dezer cirkels zijn elkaars complement.

32. De snijpunten der overstaande zijden van een bolvierhoek liggen op een grooten cirkel.

33. **Bepaling.** *Een* **bolparallelogram** *is een bolvierhoek, waarvan de diagonalen elkaar middendoor deelen.*
Bewijs de volgende eigenschappen van een bolparallelogram.
1^e de overstaande zijden zijn gelijk;
2^e de overstaande hoeken zijn gelijk;
3^e elke groote cirkel, door het snijpunt S der diagonalen getrokken, en gemeten tusschen twee overstaande zijden, wordt in dat snijpunt gehalveerd;
4^e de overstaande zijden snijden elkaar in vier punten, die op den grooten cirkel liggen, waarvan S een pool is;
5^e twee opeenvolgende hoekpunten en de tegenpunten der beide andere liggen op een kleinen cirkel.

34. Als de overstaande zijden van een bolvierhoek elkaar twee aan twee loodrecht snijden, dan staan ook de diagonalen loodrecht op elkaar. (§ 27).

35*a*. Een bolvierhoek is een bolparallelogram, als
1e de overstaande zijden twee aan twee gelijk zijn;
2e de overstaande hoeken twee aan twee gelijk zijn.

35*b*. Als van een bolvierhoek alle zijden even groot zijn, deelen de diagonalen elkaar loodrecht middendoor.

36. Van een bolparallelogram ABCD zijn de diagonalen AC en BD even groot. S is het snijpunt der diagonalen, P dat van AB en DC, Q dat van DA en CB. C′ is het tegenpunt van C. Bewijs
1e dat boldriehoek PQS rechthoekig gelijkzijdig is;
2e dat AQ een mediaan is van $\triangle$ ABC′.

37. Als in een bolvierhoek de boog, die de middens van twee overstaande zijden verbindt, loodrecht op die zijden staat, dan zal de boog, die de middens der twee andere zijden verbindt, loodrecht op den eersten verbindingsboog staan.
(Acte-examen Wisk. L. O. 1912).

38. Van den bolvierhoek ABCD zijn E, F, G en H de middens van AB, BC, CD en DA. EF en GH snijden elkaar in P en P′, FG en EH in Q en Q′. Bewijs
1e dat P, A, C en P′, evenals Q, B, D en Q′ op een grooten cirkel liggen.
2e dat het snijpunt der middelloodlijnen van de diagonalen AC en BD een pool van den grooten cirkel door P, P′, Q en Q′ is.

39. De som van de diagonalen van een bolvierhoek is grooter dan de halve omtrek, maar kleiner dan de omtrek van dien vierhoek.

40. Binnen een bolvierhoek ligt een punt, dat verbonden wordt met de hoekpunten. Bewijs, dat de som van de verbindingslijnen grooter dan de som van de diagonalen is.

41. Verander een gegeven bol-n-hoek in een (n—1)-hoek van dezelfde oppervlakte.

42. Als α de hoek van een regelmatigen bol-n-hoek is, waarvan de oppervlakte $\frac{1}{n}$ van het boloppervlak is, dan is

$$\alpha = \frac{n^2 - 2n + 4}{n^2} \times 180^\circ.$$

43. Bewijs, dat de snijpunten der overeenkomstige zijden van een boldriehoek en zijn pooldriehoek op een grooten cirkel liggen.

44. Bewijs, dat het hoogtepunt van een boldriehoek samen valt met het hoogtepunt van den pooldriehoek.

45. Van een boldriehoek zijn de basis en de som der basishoeken constant. Bewijs dat de buitenbissectrix van den tophoek door een vast punt gaat.

46. Construeer door een gegeven punt op een bol een grooten cirkel, die een gegeven grooten cirkel onder een gegeven hoek snijdt.

47. Men brengt telkens een grooten cirkel door het midden eener zijde van een boldriehoek en het midden van het bovenste stuk van de spherische hoogtelijn op die zijde. Bewijs dat de drie zoo verkregen cirkels door één punt gaan. (§ 34).

48. Men brengt telkens een grooten cirkel door het midden eener zijde van een boldriehoek en het midden van den spherischen straal naar het overstaande hoekpunt van den omgeschreven cirkel. Bewijs, dat de drie aldus verkregen cirkels door één punt gaan. (§ 34).

49. Als van een rechthoekigen boldriehoek de beide rechthoekszijden 45° zijn, is de schuine zijde 60°. Bewijs dit.

50. Als van de 3 verbindingsbogen der middens van de zijden van een boldriehoek één 90° is, dan zijn de beide anderen ieder ook 90° en het oppervlak van den driehoek bedraagt $^1/_4$ van het boloppervlak. (§ 25).

51. Als van de 3 diagonalen van een volledige vierzijde twee ieder 90° zijn, dan is ook de derde 90°.

II. RECHTHOEKIGE BOLDRIEHOEKEN.

A. Formules.

§ **44.** In de volgende paragrafen wordt steeds, wanneer sprake is van een rechthoekigen boldriehoek ABC, de letter C geplaatst bij het hoekpunt van den rechten hoek.

Eigenschap. De cosinus van de schuine zijde van een rechthoekigen boldriehoek is gelijk aan het product van de cosinussen der rechthoekszijden, of

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Bewijs.

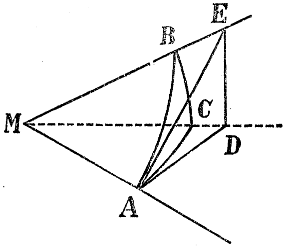


Fig. 39.

Zij ABC (fig. 39) een rechthoekige boldriehoek. Verbind het middelpunt M van den bol door stralen met de hoekpunten. Trek in A de raaklijn AD aan den boog AC, richt in vlak MBC de loodlijn DE op MD op, en verbindt E met A. Omdat MA $\perp$ AD, MA $\perp$ ED is, staat ook MA $\perp$ AE, zoodat EA de raaklijn in A aan boog AB is. In de figuur komen nu de volgende rechthoekige driehoeken voor: MAD, MAE, MED, AED. Men heeft nu

$$\frac{MA}{ME} = \frac{MD}{ME} \times \frac{MA}{MD},$$

of $\cos c = \cos a \cos b.$

Opmerkingen. 1. In bovenstaand bewijs is ondersteld, dat de rechthoekszijden van den boldriehoek scherp waren. Er moet dus worden nagegaan, of de betrekking algemeen geldig is.

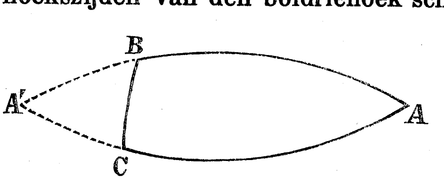


Fig. 40.

Zij $a < 90°$, $b > 90°$ (fig. 40). Van den rechthoekigen nevendriehoek A′BC zijn de rechthoekszijden scherp, zoodat

$$\cos A'B = \cos A'C \cos BC,$$

of $\cos (180° - c) = \cos (180° - b) \cos a,$

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Is $a > 90°$, $b > 90°$ (fig. 41), dan zijn in den rechthoekigen nevendriehoek ABC′ de rechthoekszijden scherp, zoodat

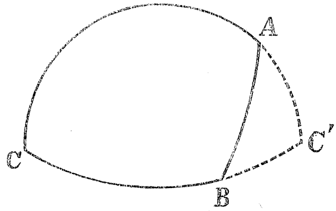


Fig. 41.

$$\cos AB = \cos BC' \cos AC',$$

of $\cos c = \cos(180° - a)\cos(180° - b)$,

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Is $a = 90°$, dan is B een pool van AC, dus ook $c = 90°$. Beide leden van $\cos c = \cos a \cos b$ worden nu gelijk nul, zoodat ook nu aan de betrekking voldaan wordt. De eigenschap is dus algemeen geldig.

2. Uit $\cos c = \cos a \cos b$ volgt:

Als de rechthoekszijden gelijksoortig zijn (d.i. beide scherp òf beide stomp), *dan is de schuine zijde scherp. Zijn ze ongelijksoortig, dan is de schuine zijde stomp.*

§ 45. **Eigenschap. De sinus van een rechthoekszijde van een rechthoekigen boldriehoek is gelijk aan den sinus van den overstaanden hoek, vermenigvuldigd met den sinus van de schuine zijde,** of

$$\sin a = \sin A \sin c, \quad \sin b = \sin B \sin c.$$

Bewijs.

In fig. 39 is
$$\frac{ED}{ME} = \frac{ED}{AE} \times \frac{AE}{ME},$$
of $\sin a = \sin A \sin c$; enz.

Opmerking. Op dezelfde wijze als in § 44 bewijst men, dat deze betrekking algemeen geldig is.

§ 46. **Eigenschap. De tangens van een rechthoekszijde van een rechthoekigen boldriehoek is gelijk aan het produkt van den cosinus van den aanliggenden scheeven hoek en de tangens van de schuine zijde,** of

$$\operatorname{tg} a = \cos B \operatorname{tg} c, \quad \operatorname{tg} b = \cos A \operatorname{tg} c.$$

Bewijs.

In fig. 39 is
$$\frac{AD}{MA} = \frac{AD}{AE} \times \frac{AE}{MA},$$
of $\operatorname{tg} b = \cos A \operatorname{tg} c$; enz.

Opmerking. Deze betrekking is ook algemeen geldig.

§ 47. **Eigenschap. De tangens van een rechthoekszijde van een rechthoekigen boldriehoek is gelijk aan het product van de tangens van den overstaanden hoek en den sinus van de andere rechthoekszijde,** of

$$\mathbf{tg}\ a = \mathbf{tg\ A\ sin}\ b, \quad \mathbf{tg}\ b = \mathbf{tg\ B\ sin}\ a.$$

Bewijs.

In fig. 39 is
$$\frac{ED}{MD} = \frac{ED}{AD} \times \frac{AD}{MD},$$
of $\quad \mathrm{tg}\, a = \mathrm{tg\,A}\sin b$; enz.

Opmerkingen. 1. Ook deze betrekking is algemeen geldig.

2. Omdat $\sin b$ steeds positief is, hebben $\mathrm{tg}\, a$ en $\mathrm{tg\, A}$ hetzelfde teeken, zijn dus òf beide scherp, òf beide stomp. Is $a = 90°$, dan is ook $A = 90°$ en omgekeerd. Wij hebben dus:

Een rechthoekszijde en de overstaande hoek zijn steeds gelijksoortig.

§ 48. **Eigenschap. De cosinus van een scheeven hoek van een rechthoekigen boldriehoek is gelijk aan het product van den cosinus van de overstaande zijde en den sinus van den anderen scheeven hoek,** of

$$\mathbf{cos\ A} = \mathbf{cos}\ a\ \mathbf{sin\ B}. \quad \mathbf{cos\ B} = \mathbf{cos}\ b\ \mathbf{sin\ A}.$$

Bewijs.

Volgens § 45 is $\quad \sin b = \sin B \sin c,$

en volgens § 46: $\quad \mathrm{tg}\, b = \cos A\ \mathrm{tg}\, c,$

waaruit door deeling volgt:

$$\cos b = \frac{\sin B \cos c}{\cos A},$$

dus $\quad \cos A = \dfrac{\sin B \cos c}{\cos b} = \dfrac{\sin B \cos a \cos b}{\cos b} = \cos a \sin B$; enz.

Opmerking. Deze formules gelden algemeen.

§ 49. **Eigenschap. De cosinus van de schuine zijde van een rechthoekigen boldriehoek is gelijk aan het product van de cotangenten der aanliggende hoeken,** of

$$\mathbf{cos}\ c = \mathbf{cot\ A\ cot\ B}.$$

Bewijs.

Volgens § 47 is $\quad \mathrm{tg}\, a = \mathrm{tg\,A} \sin b,$

$\quad \mathrm{tg}\, b = \mathrm{tg\,B} \sin a,$

waaruit volgt: $\quad \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \sin a \sin b.$

$$\frac{1}{\cos a \cos b} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B,$$

of volgens § 44: $\quad \cos c = \cot A \cot B.$

Opmerkingen. 1. Deze formule geldt voor alle waarden der elementen.

2. Uit de formule volgt:

De schuine zijde is scherp, als de aanliggende hoeken gelijksoortig zijn, en stomp, als ze ongelijksoortig zijn.

§ **50.** In de voorgaande paragrafen zijn 10 formules, elk drie elementen bevattende, van den rechthoekigen boldriehoek bewezen. De vraag kan rijzen, of er nog meer dergelijke betrekkingen zijn. Het antwoord is ontkennend.

Den rechten hoek buiten beschouwing latende, zijn er 5 elementen. Het aantal combinaties van 5 grootheden 3 aan 3 is $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10.$ En omdat de in de vorige paragrafen afgeleide betrekkingen alle verschillend zijn, is het niet mogelijk, nog andere betrekkingen tusschen drie elementen af te leiden.

Men meene intusschen niet, dat deze formules onderling onafhankelijk zijn. Neemt men b.v. drie der formules, waarin alle vijf elementen voorkomen, dan kunnen hieruit twee elementen geëlimineerd worden, waardoor één vergelijking tusschen drie elementen ontstaat, zijnde een nieuwe formule. Zoo handelden wij in § 48 en § 49.

Na dus eerst drie formules meetkundig te hebben bewezen, waarin alle elementen voorkomen, had men de overige zeven langs algebraïschen weg kunnen bepalen. De in de vorige paragrafen gevolgde manier verdient echter om haar eenvoud verre de voorkeur.

§ **51. Regel van Neper.** Laat men den rechten hoek buiten beschouwing, dan blijven over de vijf elementen

$$c,\ A,\ b,\ a,\ B.$$

Elk dezer elementen heeft twee aanliggende en twee overstaande elementen. De volgende regel (van Neper) stelt ons in staat, de betrekkingen van § 44—49 te onthouden:

Als men in een rechthoekigen boldriehoek den rechten hoek buiten beschouwing laat, **en de schuine zijde en de scheeve hoeken vervangt door hun complementen, dan is de sinus van elk element gelijk aan het product van de tangenten der aanliggende of van de cosinussen der overstaande elementen.**

De waarheid hiervan kan worden bewezen, door aan te toonen, dat de uit dezen regel voortvloeiende formules identiek zijn met die, in de vorige paragrafen gevonden.

Neper echter vond den regel niet langs dezen weg, maar uit de volgende beschouwing.

Zij ABC een boldriehoek, rechthoekig in C (fig. 42). Teeken de groote cirkels HFKL en DEFG, waarvan resp. A en B polen zijn. CA en CB snijden deze groote cirkels in E, H, K en G, terwijl de schuine zijde AB ze ontmoet in D en L. Daardoor ontstaan een bolvijfhoek ABKFE en vier boldriehoeken ADE, EHF, FGK, KLB. Deze driehoeken en de oorspronkelijke driehoek ABC hebben elk met den vijfhoek een zijde gemeen. De figuur heeft o.a, de volgende merkwaardige eigenschappen.

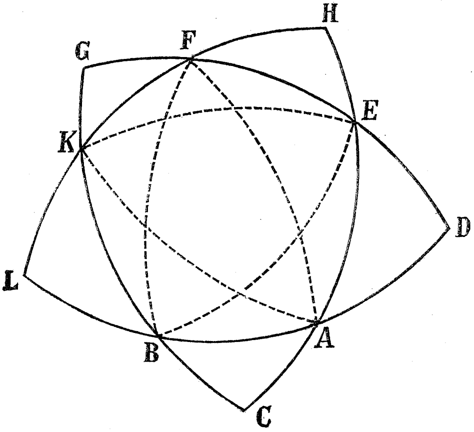


Fig. 42.

1. *De driehoeken zijn rechthoekig in C, D, H, G en L.*

Hoek D is recht, omdat B een pool is van DEFG, hoek H, omdat A een pool is van HFKL, enz.

2. *Alle diagonalen van den bolvijfhoek zijn kwadranten.*

Voor AK, AE, BF en BE is dit duidelijk, omdat A en B polen zijn van de bogen KF en EF.

Omdat $\angle C = \angle H = 90°$, is K een pool van boog CAH, dus is de diagonaal $KE = 90°$. *Elk hoekpunt van den vijfhoek is dus een pool van de tegenoverliggende zijde.*

Opmerking verdient nog de eigenschap, dat elke diagonaal loodrecht staat op twee zijden van den vijfhoek, zoodat de punten C, D, H, G en L polen zijn van de diagonalen EK, FB, KA, BE en AF. Er zijn vijf driehoeken in de figuur, waarvan elk der zijden en hoeken 90° is, nl. CEK, DFB, enz. Verder gaan de hoogtelijnen op de schuine zijden van de vijf buiten den vijfhoek liggende driehoeken door de hoekpunten van dien vijfhoek.

4. *De elementen der vijf driehoeken hangen op eenvoudige wijze samen.*

Trachten wij die van $\triangle$ AED in die van $\triangle$ ABC uit te drukken. Omdat de bogen BD en CE elk 90° zijn, is

$$AE = 90° - b, \quad AD = 90° - c.$$

Ook is $\angle$ EAD $=$ A.

Daar B pool is van boog DE, is ED $= \angle$ EDB, Nu is E pool van boog BC, dus $\angle$ EBC $= 90°$, zoodat $\angle$ EBD $= 90° -$ B, dus

$$ED = 90° - B.$$

E pool van boog BC zijnde, is $\angle$ BEC $=$ boog BC $= a$, dus

$$\angle AED = 90° - a.$$

Voor de elementen van $\triangle$ EFH vinden wij het volgende:

EF $= 90° -$ ED $= 90° - (90° -$ B$) =$ B.

$\angle$ FEH $= \angle$ AED $= 90° - a$.

EH $= 90° -$ EA $= 90° - (90° - b) = b$.

FH $= \angle$ FAH, omdat A pool is van FH; nu is $\angle$ FAH $=$ $= 90° - \angle$ EAD $= 90° -$ A, dus ook FH $= 90° -$ A.

$\angle$ HFE $= 90° - \angle$ EFA $= 90° -$ boog AD $= 90° - (90° - c) = c$.

Aldus voortgaande, vindt men voor de elementen van

$\triangle$ KFG: A, c. $90° -$ B, a, $90° - b$.

$\triangle$ BKL: $90° - a$, $90° - b$, $90° -$ A, $90° - c$, B.

Om het overzicht te vergemakkelijken, zijn de gevonden resultaten vereenigd in de volgende tabel. Daarbij is steeds de schuine zijde in 't midden gezet, en de overige elementen in dezelfde volgorde hierom gegroepeerd (naar fig. 42 kijkende in tegengestelden zin van de bewegingsrichting van de wijzers van een uurwerk). *Tevens zijn de schuine zijde en de aanliggende hoeken vervangen door hun complementen.*

KFG	a	b	$90° -$ A	$90° - c$	$90° -$ B
EAD	$90° -$ B	a	b	$90° -$ A	$90° - c$
BKL	$90° - c$	$90° -$ B	a	b	$90° -$ A
FEH	$90° -$ A	$90° - c$	$90° -$ B	a	b
ABC	b	$90° -$ A	$90° - c$	$90° -$ B	a

Een aandachtige beschouwing van deze tabel leert, dat

1e *alleen de volgende vijf grootheden voorkomen:*

$$a,\ b,\ 90° - A,\ 90° - c,\ 90° - B.$$

2e *dat de elementen van den eenen driehoek uit die van den anderen kunnen verkregen worden door een cyclische verwisseling.*

Elk verband tusschen drie elementen van den oorspronkelijken driehoek ABC geeft dus een verband tusschen de gelijksoortige elementen van een der andere driehoeken.

Heeft men nu de betrekkingen van § 44 en § 49 vooraf bewezen, als dus is aangetoond, dat

$$\sin (90^\circ - c) = \cos a \cos b,$$

en $$\sin (90^\circ - c) = \operatorname{tg} (90^\circ - A) \operatorname{tg} (90^\circ - B),$$

dan geldt ook voor de andere driehoeken de eigenschap, dat de sinus van de schuine zijde zoowel gelijk is aan het product van de tangenten der aanliggende als van de cosinussen der overstaande elementen.

Bedenkt men nu, dat de elementen der driehoeken uit die van ABC door cyclische verwisseling ontstaan, dan geldt algemeen de stelling, die wij aan 't begin van deze paragraaf als den regel van Neper gaven. Toepassing van deze stelling geeft dezelfde 10 formules der paragrafen 44—49.

§ **52.** Evenals in de vlakke meetkunde kan men den afstand van het hoekpunt A tot het voetpunt D van de hoogtelijn uit C op AB neergelaten (fig. 43), de *projectie* van AC op AB noemen. BD is dan de projectie van BC op BA.

Eigenschap. De tangens van elke rechthoekszijde is middelevenredig tusschen de tangenten van haar projectie op de schuine zijde en de schuine zijde, of

$$\mathbf{tg^2\, AC = tg\, AD\; tg\, AB,}$$
$$\mathbf{tg^2\, BC = tg\, BD\; tg\, BA.}$$

Bewijs.

Den regel van Neper toepassende op de driehoeken ABC en ADC (fig. 43), vindt men

$$\cos A = \cot AC \operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} AC \cot AB,$$

waaruit volgt

$$\operatorname{tg}^2 AC = \operatorname{tg} AD \operatorname{tg} AB.$$

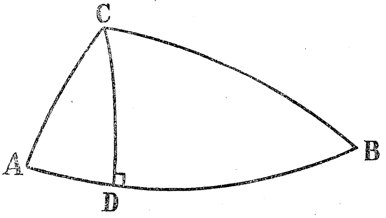


Fig. 43.

§ **53. Eigenschap. De sinus van de hoogtelijn op de schuine zijde is middelevenredig tusschen de tangenten der stukken, waarin zij de schuine zijde verdeelt,** of

$$\mathbf{sin^2\, CD = tg\, AD\; tg\, BD.}$$

Bewijs.

In de driehoeken ACD en BCD (fig. 43) heeft men:

$$\sin CD = \operatorname{tg} AD \cot ACD,$$
$$\sin CD = \operatorname{tg} BD \cot BCD,$$

waaruit door vermenigvuldiging volgt

$$\sin^2 CD = \operatorname{tg} AD \operatorname{tg} BD \cot ACD \cot BCD.$$

Omdat de hoeken ACD en BCD elkaars complement zijn, is

$$\cot \mathrm{ACD} \cot \mathrm{BCD} = 1.$$

Er komt dus $\quad \sin^2 \mathrm{CD} = \operatorname{tg} \mathrm{AD} \operatorname{tg} \mathrm{BD}.$

§ **54. Eigenschap. Het product van de sinussen van de schuine zijde en de hoogtelijn daarop is gelijk aan het product van de sinussen der rechthoekszijden,** of

$$\sin c \sin h_c = \sin a \sin b.$$

Bewijs.

In de driehoeken ACD en ABC (fig. 43) heeft men:

$$\sin h_c = \sin b \sin \mathrm{A},$$

$$\sin c \sin \mathrm{A} = \sin a,$$

waaruit na vermenigvuldiging en na weglating van den factor sin A het gevraagde volgt.

§ **55.** Behalve de in de voorgaande paragrafen aangegeven formules zijn er nog vele andere, waarvan hier enkele zullen bewezen worden.

A. Bewijs, dat in een rechthoekigen boldriehoek

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\sin (c - b)}{\sin (c + b)}. \qquad \text{(Toel. ex. Univ.)}$$

Deze formule bevat de elementen A, b en c en zal dus afgeleid moeten worden uit die van § 46.

Men heeft nu achtereenvolgens

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.$$

$$\frac{1 - \cos \mathrm{A}}{1 + \cos \mathrm{A}} = \frac{\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b}.$$

$$\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \mathrm{A}}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \mathrm{A}} = \frac{\sin c \cos b - \sin b \cos c}{\sin c \cos b + \sin b \cos c}.$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\sin (c - b)}{\sin (c + b)}.$$

B. Bewijs, dat in een rechthoekigen boldriehoek

$$\cos (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = - \frac{\sin a \sin b}{1 + \cos a \cos b}.$$

De hierin voorkomende hoeken moeten door zijden vervangen worden. Nu is

$$\cos \mathrm{A} = \operatorname{tg} b \cot c, \quad \cos \mathrm{B} = \operatorname{tg} a \cot c, \quad \sin \mathrm{A} = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin \mathrm{B} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Daardoor wordt

$$\cos(A+B) = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cot^2 c - \frac{\sin a \sin b}{\sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin a \sin b \cos^2 c}{\cos a \cos b \sin^2 c} - \frac{\sin a \sin b}{\sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin a \sin b (\cos^2 c - \cos a \cos b)}{\cos a \cos b \sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin a \sin b (\cos^2 a \cos^2 b - \cos a \cos b)}{\cos a \cos b (1 - \cos^2 c)}$$

$$= - \frac{\sin a \sin b (1 - \cos a \cos b)}{1 - \cos^2 a \cos^2 b} = - \frac{\sin a \sin b}{1 + \cos a \cos b}.$$

§ 56. Vraagstukken.

1. Bewijs, dat in een rechthoekigen boldriehoek ($\angle C = 90°$).
   a. $\cos^2 h_c = \cos^2 A + \cos^2 B$.
   b. $\sin^2 h_c \sin^2 c = \sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c$.
   c. $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \sin h_c$.
   d. $\operatorname{tg}^2 h_c = \dfrac{\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b}$.
   e. $\cot^2 h_c = \cot^2 a + \cot^2 b$.

2. In den rechthoekigen boldriehoek ABC trekt men CD $\perp$ AB, DE $\perp$ BC en DF $\perp$ AC. Bewijs dat

$$\sin DE \sin DF = \frac{\operatorname{tg}^3 a \operatorname{tg}^3 b}{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b) \operatorname{tg}^2 c}.$$

3. Bewijs, dat in een rechthoekigen boldriehoek:
   a. $\dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)} = - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} c$. (Toel. Univ. 1911.)
   b. $\sin^2 A \cos^2 c = \sin(A - a) \sin(A + a)$. (Toel. Univ. 1911).
   c, $\sin(a+b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \sin(a-b) \cot \tfrac{1}{2}(A-B)$. (Toel. Univ. 1912).
   d. $\sin(A-B) = \dfrac{\cos b - \cos a}{1 - \cos b \cos a}$.
   e. $\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b$, ($K_1$).
   f. $2 \sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin^2 \tfrac{1}{2}(a+b) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(a-b)$.
   g. $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(c+a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(c-a)}$.

4. In een rechthoekigen boldriehoek is
   a. $\cos^2 B \sin^2 c = \sin(c-b) \sin(c+b)$.
   b. $\sin^2 B \cos^2 c = \sin(B-b) \sin(B+b)$.

c. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)}$.

d. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)}$.

e. $\sin a \operatorname{tg} \frac{1}{2} A - \sin b \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sin (a - b)$.

5. Als in een rechthoekigen boldriehoek $a + b = 180°$ is, dan is

$$\sin c = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}.$$ (Toel. Univ, 1911).

6. Als van een rechthoekigen boldriehoek
   1e $c = 2b$, dan is ook $A = 2B$.
   2e $A = 2B$, dan is ook $c = 2b$. Bewijs dit.

7. Bewijs dat de schuine zijde van een rechthoekigen gelijkbeenigen boldriehoek niet stomp kan zijn.

8. Men verbindt de hoekpunten van een boltweehoek door een willekeurigen vasten cirkel en laat uit een punt P van dezen cirkel spherische loodlijnen PQ en PR neer op de zijden van den tweehoek. Bewijs, dat sin PQ: sin PR constant is, als P zich langs den grooten cirkel beweegt.

9. Van een bolvierhoek ABCD is $A = B = C = 90°$. Bewijs, dat
   1e $\sin AD : \sin CD = \cot AB : \cot CB$.
   2e $\sin^2 AD + \sin^2 CD = \sin^2 BD$.

10. Bewijs dat in den vijfhoek van Neper (fig. 42) elke hoek het supplement van de overstaande zijde is.

B. **Berekeningen.**

§ 57. Bij de bepaling van de onbekende elementen van een rechthoekigen boldriehoek uit twee gegeven elementen zullen de volgende gevallen achtereenvolgens nagegaan worden.

Gegeven zijn in het

1e geval: de twee rechthoekszijden.

2e geval: de schuine zijde en een rechthoekszijde.

3e geval: een rechthoekszijde en de overstaande hoek.

4e geval: een rechthoekszijde en de aanliggende scheeve hoek.

5e geval: de schuine zijde en een der scheeve hoeken.

6e geval: de beide scheeve hoeken.

§ **58. Eerste geval. Gegeven:** $a = 160°20'40''$, $b = 115°12'24''$.
Gevraagd: c, A, B.

Berekening. De onbekende elementen worden gevonden uit de formules

$$\cos c = \cos a \cos b,\quad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b},\quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

Vult men de gegeven waarden in, dan komt er

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos 160°20'40'' \cos 115°12'24'' \\ &= \sin\ 70°20'40'' \sin\ 25°12'24''.\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} 160°20'40''}{\sin 115°12'24''} = -\frac{\cot 70°20'40''}{\cos 25°12'24''},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} 115°12'24''}{\sin 160°20'40''} = -\frac{\cot 25°12'24''}{\cos 70°20'40''}.$$

In overeenstemming met opmerking 2 van § 44 vinden wij voor $\cos c$ een positieve waarde, dus voor c een scherpen boog, terwijl voor A en B (opmerking 2 van § 47) stompe hoeken worden gevonden.

$$\begin{aligned}
\log \sin 70°20'40'' &= 9,97393 - 10 \\
\log \sin 25°12'24'' &= 9,62929 - 10 \\ \hline
\log \cos c &= 9,60322 - 10 \\
c &= 66°21'19'' \\
\log \cot 70°20'40'' &= 9,55288 - 10 \\
\log \cos 25°12'24'' &= 9,95655 - 10 \\ \hline
\log \operatorname{tg} A &= 9,59633 - 10(n) \\
A = 180° - 21°32'31'' &= 158°27'29'' \\
\log \cot 25°12'24'' &= 10,32725 - 10 \\
\log \cos 70°20'40'' &= \ \ 9,52681 - 10 \\ \hline
\log \operatorname{tg} B &= 10,80044 - 10(n) \\
B = 180° - 81°11'' &= 98°59'49''
\end{aligned}$$

Discussie. Uit deze berekening blijkt, dat men slechts één driehoek vindt. Zie ook § 11, 2ᵉ.

§ **59. Tweede geval. Gegeven:** $a = 16°20'32''$, $c = 80°25'30''$
Gevraagd: b, A, B.

Berekening.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a},\quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c},\quad \cos B = \operatorname{tg} a \cot c.$$

$$\begin{aligned}
\log \cos c &= 9,22099 - 10 \\
\log \cos a &= 9,98209 - 10 \\ \hline
\log \cos b &= 9,23890 - 10 \\
b &= 80°1'4''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \sin a &= 9,44928 - 10 \\
\log \sin c &= 9,99391 - 10 \\ \hline
\log \sin A &= 9,45537 - 10 \\
A &= 16°34'47''
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{tg}\ a = 9{,}46719 - 10 \\ \underline{\log \cot\ c = 9{,}22709 - 10} \\ \log \cos B = 8{,}69428 - 10. \\ \qquad B = 87^\circ 9' 53'' \end{array}$$

Discussie. Blijkens de eerste en de derde formule vindt men voor b en B slechts één waarde. Omdat a en A gelijksoortig zijn, moet voor A den scherpen hoek genomen worden, en niet zijn supplement. Men vindt dus slechts één driehoek.

De gegevens moeten bovendien aan zekere voorwaarden voldoen. Volgens de tweede formule vindt men voor A slechts dan een waarde, als sin a kleiner is dan of gelijk aan sin c. Is $\sin a = \sin c$, dan is

$$a = c \text{ òf } a = 180^\circ - c.$$

In beide gevallen is $\sin A = 1$, dus $A = 90^\circ$, dus ook $a = 90^\circ$, bijgevolg $c = 90^\circ$. Volgens de eerste formule is b dan onbepaald, wat ook blijkt uit de figuur, omdat hoekpunt B een pool is van zijde AC.

Is $c < 90^\circ$, dan moet $180^\circ - c < a < c$ zijn.

Is $c > 90^\circ$, dan moet $c < a < 180^\circ - c$ zijn.

§ 60. Derde geval. Gegeven: $a = 140^\circ$, $A = 125^\circ$.

Gevraagd: b, c, B.

Berekening.

$$\sin b = \cot A \operatorname{tg} a, \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin B = \frac{\cos A}{\cos a}.$$

Door invulling der gegeven waarden komt er

$$\sin b = \cot 125^\circ \operatorname{tg} 140^\circ = \operatorname{tg} 35^\circ \cot 50^\circ.$$

$$\sin c = \frac{\sin 140^\circ}{\sin 125^\circ} = \frac{\cos 50^\circ}{\cos 35^\circ}.$$

$$\sin B = \frac{\cos 125^\circ}{\cos 140^\circ} = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 50^\circ}.$$

$$\begin{array}{ll} \log \operatorname{tg}\ 35^\circ = 9{,}84523 - 10 & \log \cos 50^\circ = 9{,}80807 - 10 \\ \underline{\log \cot 50^\circ = 9{,}92381 - 10} & \underline{\log \cos 35^\circ = 9{,}91336 - 10} \\ \log \sin b = 9{,}76904 - 10. & \log \sin c = 9{,}89471 - 10. \\ \qquad b_1 = 35^\circ 59' & \qquad c_1 = 51^\circ 41' 35'' \\ \qquad b_2 = 144^\circ 1' & \qquad c_2 = 128^\circ 18' 25'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log \sin 35^\circ = 9{,}75859 - 10 \\ \underline{\log \sin 50^\circ = 9{,}88425 - 10} \\ \log \sin B = 9{,}87434 - 10. \\ \qquad B_1 = 48^\circ 29' \\ \qquad B_2 = 131^\circ 31' \end{array}$$

Men vindt dus de volgende driehoeken.

a	A	b	c	B
140°	125°	35°59′	128°18′25″	48°29′
140°	125°	144°1′	51°41′35″	131°31′

Ga na, of de gevonden waarden op de goede manier zijn gecombineerd!

Discussie. De gegeven zijde en de gegeven hoek moeten gelijksoortig zijn.

Volgens de tweede formule moet $\sin a \leqq \sin A$ zijn.

Is $\sin a = \sin A$, dan is òf $a = A$, òf $a = 180° - A$.

Is $a = A$, dan is $\sin c = 1$, en $c = 90°$.

$\sin B = 1$, dus $B = 90°$, derhalve ook $b = 90°$.

Er is dan één driehoek.

Is $a = 180° - A$, of $a + A = 180°$, dan is elk dezer elementen 90°, omdat ze gelijksoortig moeten zijn. De andere elementen zijn dan onbepaald, behalve zijde c, die 90° is (teeken een figuur).

Is $\sin a < \sin A$, en $a < 90°$, dan moet $A > a$ zijn.

(Voor $A < a$ komt er geen driehoek). De derde formule geeft dan twee waarden voor B, waarbij twee waarden van b behooren. Bij elk dezer stellen waarden behoort volgens de formule $\cos c = \cos a \cos b$ één waarde van c. Er ontstaan dus twee driehoeken.

Is $\sin a < \sin A$, en $a > 90°$, dan moet $A < a$ zijn.

(Voor $A > a$ komt er geen driehoek). Ook hier ontstaan twee driehoeken.

Men heeft dus het volgende overzicht.

$a = A \neq 90°$, $b = 90°$, $c = 90°$, $B = 90°$ *Eén driehoek.*

$a = A = 90°$, $c = 90°$, b en B onbepaald *Oneindig veel driehoeken.*

$a < 90°$, $A > a$ . . . . *Twee driehoeken.*

$a < 90°$, $A < a$ . . . . *Geen driehoek.*

$a > 90°$, $A < a$ . . . . *Twee driehoeken.*

$a > 90°$, $A > a$ . . . . *Geen driehoek.*

§ **61. Vierde geval. Gegeven:** $a = 110°$, $B = 20°$,

Gevraagd: b, c, A.

Berekening.

$$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B, \quad \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos B}, \quad \cos A = \cos a \sin B.$$

Door invulling der gegeven waarden komt er:

$$\operatorname{tg} b = \sin 110° \operatorname{tg} 20° = \cos 20° \operatorname{tg} 20° = \sin 20°.$$

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} 110^\circ}{\cos 20^\circ} = -\frac{\cot 20^\circ}{\cos 20^\circ} = -\frac{1}{\sin 20^\circ}.$$

$$\cos A = \cos 110^\circ \sin 20^\circ = -\sin^2 20^\circ.$$

$\log \operatorname{tg} b = 9{,}53405 - 10$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} c = 10{,}46595 - 10\,(n)$

$b = 18^\circ 52' 56''.$ $\qquad$ $c = 180^\circ - 71^\circ 7' 4'' = 108^\circ 52' 56''.$

$$\log \cos A = 9{,}06810 - 10\,(n)$$

$$A = 180^\circ - 83^\circ 16' 57'' = 94^\circ 43' 3''.$$

Discussie. In overeenstemming met opmerking 2 van § 47 vindt men een scherpe waarde voor b, en een stompe voor A.

Men vindt slechts één driehoek (§ 11, 1e).

§ 62. Vijfde geval. Gegeven: $c = \operatorname{bg} \cos \frac{2}{3}$, $A = \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$.

Gevraagd: a, b, B.

Berekening.

$$\sin a = \sin c \sin A, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\cot A}{\cos c}.$$

Nu is $\cos c = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$, dus c en A zijn scherp.

Verder vindt men:

$$\sin c = \sqrt{(1 - \tfrac{4}{9})} = \tfrac{1}{3}\sqrt{5}, \quad \operatorname{tg} c = \frac{\sin c}{\cos c} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ zoodat}$$

$$\sin a = \tfrac{1}{3}\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \tfrac{1}{3}, \ \operatorname{tg} b = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 1, \ \operatorname{tg} B = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$$

Hieruit volgt reeds dadelijk, dat $b = 45^\circ$.

$\log \sin a = 9{,}52288 - 10$ $\qquad$ $\log \operatorname{tg} B = 10{,}47712 - 10$

$a = 19^\circ 28' 17''.$ $\qquad$ $B = 71^\circ 33' 54''.$

Discussie. Omdat a gelijksoortig is met A, moet voor a de scherpe waarde genomen worden.

Is $c = 90^\circ$, $A \neq 90^\circ$, dan is $a = A$, $b = B = 90^\circ$.

Is $c \neq 90^\circ$, $A = 90^\circ$, dan *geen driehoek.*

Is $c = A = 90^\circ$, dan *oneindig veel driehoeken.*

§ 63. Zesde geval. Gegeven: $A = 160^\circ$, $B = 80^\circ$.

Gevraagd: a, b, c.

Berekening.

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}, \quad \cos c = \cot A \cot B.$$

Door invulling der gegeven waarden vindt men

$$\cos a = \frac{\cos 160^\circ}{\sin 80^\circ} = -\frac{\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ},$$

$$\cos b = \frac{\cos 80^\circ}{\sin 160^\circ} = \frac{\cos 80^\circ}{\cos 70^\circ},$$

$$\cos c = \cot 160^\circ \cot 80^\circ = -\operatorname{tg} 70^\circ \cot 80^\circ.$$

$$\begin{array}{r}
\log \sin 70^\circ = 9{,}97299 - 10 \\
\log \sin 80^\circ = 9{,}99335 - 10 \\
\hline
\log \cos a = 9{,}97964 - 10(n) \\
a = 180^\circ - 17^\circ 24' 29'' \\
= 162^\circ 35' 31''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\log \cos 80^\circ = 9{,}23967 - 10 \\
\log \cos 70^\circ = 9{,}53405 - 10 \\
\hline
\log \cos b = 9{,}70562 - 10 \\
b = 59^\circ 29' 18''
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log \operatorname{tg} 70^\circ = 10{,}43893 - 10 \\
\log \cot 80^\circ = 9{,}24632 - 10 \\
\hline
\log \cos c = 9{,}68525 - 10(n) \\
c = 180^\circ - 61^\circ 1' 24'' = 118^\circ 58' 36''
\end{array}$$

Vraag. Waarom is de gevonden waarde van c tweemaal zoo groot als die van b?

Discussie. De drie elementen a, b en c worden hier door hun cosinus bepaald. Men kan er dus geen twee waarden voor vinden.

Vindt men waarden voor a en b, dan volgens § 58 ook voor c. Daartoe is noodig, dat de volstrekte waarden der breuken.

$$\frac{\cos A}{\sin B} \text{ en } \frac{\cos B}{\sin A}$$

kleiner dan 1 (niet gelijk aan 1) zijn.

Is $A < 90^\circ$, dan moet $\sin(90^\circ - A) < \sin B$ zijn,
dus òf $90^\circ - A < B$, òf $90^\circ + A > B$.
Deze ongelijkheden herleiden zich tot

$$A + B > 90^\circ, \quad B - A < 90^\circ.$$

Is daarentegen $A > 90^\circ$, dan moet
$\sin(A - 90^\circ) < \sin B$ zijn,
dus òf $A - 90^\circ < B$, òf $180^\circ - (A - 90^\circ) > B$.
Deze ongelijkheden herleiden zich tot

$$A - B < 90^\circ, \quad A + B < 270^\circ,$$

of in woorden:

De som der scheeve hoeken moet grooter dan 90°, maar kleiner dan 270° zijn, terwijl hun verschil kleiner dan 90° moet zijn. (Bewijs deze eigenschappen ook meetkundig).

§ **64.** In deze paragraaf zullen eenige voorbeelden van oplossing gegeven worden, als van een rechthoekigen boldriehoek twee elemenniet rechtstreeks gegeven zijn.

Eerste voorbeeld. Gegeven: A, $b+c$.

In § 55A is bewezen de formule

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\sin(c-b)}{\sin(c+b)},$$

waaruit volgt, dat $\sin(c-b) = \sin(c+b)\,\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A}$. Hieruit vindt men $c-b$, en daar $c+b$ bekend is, kunnen c en b bepaald worden, enz.

Tweede voorbeeld. Gegeven: $a+\mathrm{B} = b+\mathrm{A} = 90°$; $\angle \mathrm{C} = 90°$.

Men heeft:

$$\sin \mathrm{A} : \sin \mathrm{B} = \sin a : \sin b$$
$$\sin \mathrm{A} : \sin \mathrm{B} = \cos \mathrm{B} : \cos \mathrm{A}$$
$$2 \sin \mathrm{A} \cos \mathrm{A} = 2 \sin \mathrm{B} \cos \mathrm{B}$$
$$2\mathrm{A} = 2\mathrm{B} \quad \text{of} \quad 2\mathrm{A} = 180° - 2\mathrm{B}$$
$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \quad \text{of} \quad \mathrm{A} = 90° - \mathrm{B}$$

Zij nu $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ dan volgt uit het gegevene ook $a = b$.

$$\cos \mathrm{A} = \cos a \sin \mathrm{B}$$
$$\cos(90° - b) = \cos a \sin(90° - a)$$
$$\sin b = \cos^2 a.$$
$$\sin a = \cos^2 a$$
$$\sin a = 1 - \sin^2 a.$$

$$\sin^2 a + \sin a - 1 = 0$$
$$\sin a = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$
$$\text{of } a = 38°10'15'' \qquad b = 38°10'15''$$
$$\mathrm{B} = 51°49'35'' \qquad \mathrm{A} = 51°49'35''.$$

Voor $\mathrm{A} = 90° - \mathrm{B}$, zoude men hebben $\mathrm{A}+\mathrm{B} = 90°$ en dit is onmogelijk in een rechthoekigen boldriehoek.

Derde voorbeeld. Gegeven: c, $a-b$.

Uit $\cos c = \cos a \cos b$ volgt:

$$2\cos c = 2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

dus $\cos(a+b) = 2\cos c - \cos(a-b)$.

Weliswaar kan hieruit $a+b$ berekend worden, maar eenvoudiger is de oplossing, wanneer men het tweede lid van de vergelijking geschikt maakt voor berekening met logarithmen, aldus:

$$2\cos c - \cos(a-b) = 2\cos c \left\{1 - \frac{\cos(a-b)}{2\cos c}\right\}.$$

Stel nu $\dfrac{\cos(a-b)}{2\cos c} = \mathrm{tg}\,\varphi$, dan wordt

$$\cos(a+b) = 2\cos c\,(1-\operatorname{tg}\varphi)$$
$$= \frac{2\cos c}{\cos\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi)$$
$$= \frac{2\cos c}{\cos\varphi\cos 45^\circ}\cos(\varphi + 45^\circ).$$

Heeft men hieruit $a+b$ gevonden, dan worden a en b bekend, enz.

§ **65.** Als een der te berekenen elementen weinig van 0° of 90° verschilt, is een nauwkeurige bepaling daarvan door middel van den sinus of den cosinus bezwaarlijk.

De cosinus van een hoek dicht bij 0° ondergaat n.l. uiterst kleine veranderingen, eveneens de sinus van een hoek dicht bij 90°. Met hun logarithmen is dat dus ook het geval. In een logarithmentafel met 5 decimalen heeft men b.v.

$$\log\cos 0^\circ 17' = 9{,}99999 - 10,$$
en ook
$$\log\cos 0^\circ 28' = 9{,}99999 - 10.$$

Moest men dus de waarde van a berekenen uit

$$\log\cos a = 9{,}99999 - 10,$$

dan had men keuze uit alle hoeken van 0°17′ tot 0°28′. In het algemeen kan een hoek door middel van zijn tangens of cotangens nauwkeuriger gevonden worden dan met behulp van zijn sinus of cosinus (zie de logarithmentafel!)

Men kan daartoe met vrucht gebruik maken van de bekende formules:

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

De eerste formule kan gebruikt worden, als φ weinig van 90° verschilt; wel verschilt dan $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ weinig van 0°, maar hoek $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ wordt bepaald door zijn tangens. De tweede formule doet dienst, als φ dicht bij 0° ligt.

Hier volgen nu verschillende methoden, om in dergelijke kritieke gevallen den boldriehoek op te lossen.

Eerste geval. Zijn de gegevens a en b zoodanig, dat c weinig van 0° verschilt, dan geeft de formule $\cos c = \cos a \cos b$ voor c een onnauwkeurige waarde.

Volgens formule (2) is nu

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}} = \sqrt{\frac{1-\cos a\cos b}{1+\cos a\cos b}}.$$

(Waarom mag men het minteeken voor den wortel weglaten?)
Stelt men $\cos a \cos b = \mathrm{tg}\,\alpha$, dan wordt

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,c = \sqrt{\frac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}} = \sqrt{\mathrm{tg}\,(45^\circ-\alpha)}.$$

Men berekent dus eerst α, daarna c.

Een tweede middel om c nauwkeuriger te vinden is dit. Bereken eerst A uit

$$\mathrm{tg}\,A = \frac{\cancel{\sin b}}{\cancel{\mathrm{tg}\,a}} = \frac{\mathrm{tg}\,a}{\sin b}$$

en vervolgens c uit

$$\mathrm{tg}\,c = \frac{\mathrm{tg}\,b}{\cos A}.$$

Zijde c wordt dan door haar tangens bepaald.

Tweede geval. Gegeven a en c.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a},\quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c},\quad \cos B = \mathrm{tg}\,a \cot c.$$

Men make hier gebruik van de formules.

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b = +\sqrt{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,(c+a)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,(c-a)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}B = +\sqrt{\frac{\sin(c-a)}{\sin(c+a)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\mathrm{tg}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\,A) = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(c+a)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,(c-a)}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

(Verklaar de teekens voor de wortelvormen!).
Formule (4) werd reeds afgeleid in § 55A.
Tot (3) komt men aldus:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,b = \sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}} = \sqrt{\frac{\cos a-\cos c}{\cos a+\cos c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\,(c+a)\sin\frac{1}{2}\,(c-a)}{\cos\frac{1}{2}\,(c+a)\cos\frac{1}{2}\,(c-a)}} = \sqrt{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,(c+a)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,(c-a)}.$$

De lezer leide nu zelf formule (5) af.

Verschillen b en B weinig van 0°, en A weinig van 90°, dan geven (3), (4) en (5) nauwkeuriger oplossingen. Ze hebben bovendien nog dit voordeel, dat men slechts vier logarithmen behoeft op te zoeken; de formules in § 59 eischen het zoeken van zes logarithmen.

Derde geval. Gegeven a en A.

$$\sin b = \cot A\,\mathrm{tg}\,a,\quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin A},\quad \sin B = \frac{\cos A}{\cos a}.$$

Verschillen b, c en B weinig van 90°, dan is hun bepaling door middel van den sinus onnauwkeurig. Men neme hier

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A - a)\cot\tfrac{1}{2}(A + a)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) = \pm\sqrt{\frac{\sin(A - a)}{\sin(A + a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A - a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A + a)} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

De afleiding van (6) volgt hieronder.

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\frac{1 - \sin c}{1 + \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin A - \sin a}{\sin A + \sin a}}$$
$$= \pm\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A - a)\cot\tfrac{1}{2}(A + a)}.$$

Vierde geval. Gegeven a en B.

In § 61 werd A bepaald uit $\cos A = \cos a \sin B$, dus door middel van zijn cosinus. Berekent men eerst b uit $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$, dan kan men A nauwkeuriger vinden uit $\operatorname{tg} A = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$.

Vijfde geval. Gegeven c en A.

In § 62 werd a berekend uit $\sin a = \sin c \sin A$, dus met behulp van den sinus.

Bepaal eerst b uit $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$, en daarna a uit $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A$.

Ook kan men den volgenden weg inslaan:

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \sin c \sin A}{1 + \sin c \sin A}}.$$

Stelt men nu $\sin c \sin A = \operatorname{tg}\alpha$, dan wordt

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}} = \pm\sqrt{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}.$$

Zesde geval. Gegeven A en B.

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}, \quad \cos c = \cot A \cot B.$$

Verschillen a, b en c weinig van 0° of 180°, dan make men gebruik van de formules

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{\frac{\sin(A + B - 90^\circ)}{\cos(A - B)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = +\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A + B - 90^\circ)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A - B + 90^\circ)} \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = +\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A + B - 90^\circ)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B - A + 90^\circ)} \quad . \quad . \quad (11)$$

Hier volgt de afleiding van (10)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = +\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = +\sqrt{\frac{\sin B - \cos A}{\sin B + \cos A}} = +\sqrt{\frac{\cos(90^\circ - B) - \cos A}{\cos(90^\circ - B) + \cos A}}$$
$$= +\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(A + B - 90^\circ)\sin\tfrac{1}{2}(A - B + 90^\circ)}{\cos\tfrac{1}{2}(A + B - 90^\circ)\cos\tfrac{1}{2}(A - B + 90^\circ)}}$$
$$= +\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A + B - 90^\circ)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A - B + 90^\circ)}.$$

§ 66. De rechtzijdige boldriehoek. De pooldriehoek van een rechtzijdigen boldriehoek is rechthoekig. Kent men nu van een rechtzijdigen boldriehoek, behalve de rechte zijde, twee andere elementen, dan zijn van den rechthoekigen pooldriehoek voldoende elementen bekend om de andere te kunnen bepalen. Neemt men van den gevonden pooldriehoek de supplementen der elementen, dan heeft men de elementen van den gevraagden driehoek.

Een tweede methode is, uit de tien formules van den rechthoekigen boldriehoek tien formules voor den rechtzijdigen af te leiden. Vervangt men in de formules der § § 44—49 alle elementen door die van den pooldriehoek, dan krijgt men het volgende stel:

$$\cos C = -\cos A \cos B, \qquad \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b \sin A,$$
$$\sin B = \sin b \sin C, \qquad \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} a \sin B,$$
$$\sin A = \sin a \sin C, \qquad \cos b = \sin a \cos B,$$
$$\operatorname{tg} A = -\cos b \operatorname{tg} C, \qquad \cos a = \sin b \cos A,$$
$$\operatorname{tg} B = -\cos a \operatorname{tg} C, \qquad \cos C = -\cot a \cot b.$$

Hierbij is c de rechte zijde.

Schrijft men deze formules op de volgende manier:

$$\cos(180° - C) = \sin(90° - A)\sin(90° - B),$$
$$\cos(90° - B) = \sin b \sin(180° - C),$$
$$\cos(90° - A) = \sin a \sin(180° - C),$$
$$\cos b = \cot(90° - A)\cot(180° - C),$$
$$\cos a = \cot(90° - B)\cot(180° - C),$$
$$\cos(90° - A) = \cot(90° - B)\cot b,$$
$$\cos(90° - B) = \cot(90° - A)\cot a,$$
$$\cos b = \sin a \sin(90° - B),$$
$$\cos a = \sin b \sin(90° - A),$$
$$\cos(180° - C) = \cot a \cot b,$$

dan komt men tot dezen regel:

Als men in een rechtzijdigen boldriehoek de hoeken aan de rechte zijde vervangt door hun complement, en den hoek over die zijde door zijn supplement, dan is de cosinus van elk element gelijk aan het product van de cotangenten der aanliggende en van de sinussen der overstaande elementen.

Een derde methode is, den rechtzijdigen boldriehoek te beschouwen als een scheefhoekigen, waarvan één zijde een kwadrant is. De formules, die daarop betrekking hebben, worden in het volgende hoofdstuk afgeleid.

§ 67. Gelijkbeenige en gelijkzijdige boldriehoeken.

Deze driehoeken kunnen door een hoogtelijn uit een hoekpunt in twee symmetrische rechthoekige boldriehoeken verdeeld worden. De bepaling der onbekende elementen is dus herleid tot die van rechthoekige driehoeken.

§ 68. Over het voorstellen van hoeken en bogen door middel van π.

Als eenheid van hoek kan men nemen het 90^{ste} deel van een rechten hoek (*hoekgraad*), als boogeenheid het 360^{ste} deel van een cirkelomtrek (*booggraad*). Door een andere eenheid te kiezen, kan men echter veel herhaaldelijk voorkomende hoeken of bogen op eenvoudiger manier voorstellen.

Deze eenheid is de boog van een cirkelomtrek (of de daarop staande middelpuntshoek), die gelijk is aan den straal van den cirkel; zij heet radiaal.

Daar de cirkelomtrek gelijk is aan $2\pi r$, bevat die omtrek, als r als eenheid wordt aangenomen, 2π radialen. Een boog van $360°$ bevat dus 2π radialen, of zooals men het kortweg uitdrukt: is gelijk aan 2π. Evenzoo kan men zeggen:

$$180° = \pi, \quad 90° = \frac{\pi}{2}, \quad 60° = \frac{\pi}{3}, \quad 24° = \frac{2\pi}{15}, \text{ enz.}$$

Wij willen ten slotte nog een radiaal uitdrukken in graden, minuten en seconden.

Omdat een boog van $360°$ 2π radialen bevat, is een boog van $\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$ gelijk aan één radicaal.

Door de deeling uit te voeren, komt er:

$$1 \text{ radiaal} = 57°17'45''.$$

§ 69. Vraagstukken.

Bepaal de onbekende elementen van een rechthoekigen boldriehoek ($\angle$ C $= 90°$), als

1. $a =$ boog cos $\frac{3}{4}$, $b =$ boog cos $\frac{3}{5}$.
2. $b = 127°4'30''$, $c = 112°48'$. (Toel. Univ. 1908).
3. $a = 94°12'13''$, A $= 92°13'47''$. (Lit. Math. ex. 1887).
4. $a = 125°26'40''$, B $= 95°10'30''$. (Lit. Math. ex. 1886).
5. $c = 72°$, A $= 36°$.
6. A $= 60°$, B $= 45°$.

7. Bereken h_c, als $a = 84°$, $b = 75°$, C $= 90°$.

8. Van een gelijkzijdigen boldriehoek is de hoogtelijn 75°. Bereken de zijde en den hoek van dien driehoek.
9. Van een rechthoekigen boldriehoek is $c = 2b$, $A = 72^\circ$. Bepaal de onbekende elementen.

Bepaal de onbekende elementen van een rechthoekigen boldriehoek ($\angle$ C $= 90^\circ$), als

10. $c = 37^\circ21'39''$, $a - b = 10^\circ48'44''$.
11. $c = 65^\circ$, $a + b = 90^\circ$. (Toel. Univ. 1908).
12. $a = 48^\circ$, $A + B = 125^\circ$. (Toel. Univ. 1902).
13. $c = 66^\circ$, $A + B = 126^\circ$.
14. $s = 90^\circ$, $c = 72^\circ25'10''$.
15. $c = 63^\circ21'24''$, $A + a = 133^\circ35'44''$.
16. $a = 40^\circ31'20''$, $b + c = 111^\circ35'25''$.
17. $A = 147^\circ2'54''$, $b + c = 185^\circ1'3''$.
18. $A = 76^\circ17'20''$, $c - b = 34^\circ50'$.
19. $a + b = 108^\circ7'43''$, $A + B = 118^\circ57'40''$.

20. Bepaal de elementen van een gelijkbeenigen rechthoekigen boldriehoek, als de omtrek het supplement van de schuine zijde is.
21. Geef formules ter berekening van de onbekende elementen, als gegeven zijn: $2s$, A en $C = 90^\circ$.

Bepaal de onbekende elementen van een rechthoekigen boldriehoek, als

22. $A = 130^\circ$, $B = 138^\circ$.
23. $a = 1^\circ4'10''$, $b = 1^\circ15'40''$.
24. $a = 179^\circ30'40''$, $c = 178^\circ20'30''$.
25. $a = 178^\circ14'50''$, $A = 179^\circ18'32''$.
26. $b = 1^\circ16'26''$, $A = 88^\circ4'20''$.
27. $c = 37^\circ40'20''$, $A = 89^\circ25'32''$.

III. SCHEEFHOEKIGE BOLDRIEHOEKEN.

A. Formules.

Betrekkingen tusschen vier elementen.

§ 70. **Eigenschap. In elken boldriehoek is de cosinus eener zijde gelijk aan het product van de cosinussen der andere zijden, vermeerderd met het gedurig product van de sinussen dezer zijden en den cosinus van hun ingesloten hoek. (Eerste cosinusregel).**

Bewijs.

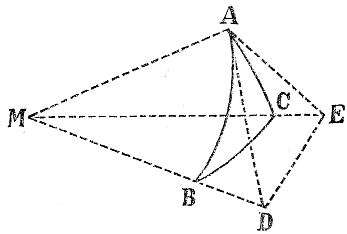


Fig. 44.

Zij ABC (fig. 44) een boldriehoek, waarvan de zijden b en c beide kleiner dan 90° zijn. Verbind het middelpunt van den bol M met de hoekpunten en trek in A raaklijnen aan de bogen AB en AC, tot zij de verlengde stralen MB en MC in D en E snijden, dan is $\angle$ DAE $=$ A. Neemt men den bolstraal als eenheid aan, dan is AD $= \operatorname{tg} c$, AE $= \operatorname{tg} b$, MD $= \sec c$, ME $= \sec b$.

Nu komt DE voor als zijde van de driehoeken ADE en MDE. Past men op deze driehoeken den cosinusregel uit de vlakke driehoeksmeting toe, dan komt er:

$$\begin{aligned} DE^2 &= ME^2 + MD^2 - 2\,ME \times MD \cos a \\ &= \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a. \\ DE^2 &= AE^2 + AD^2 - 2\,AE \times AD \cos A \\ &= \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A.$$

$$\begin{aligned} 2 \sec b \sec c \cos a &= (\sec^2 b - \operatorname{tg}^2 b) + (\sec^2 c - \operatorname{tg}^2 c) + 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A \\ &= 2 + 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A. \end{aligned}$$

$$\sec b \sec c \cos a = 1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A,$$

of na vermenigvuldiging met $\cos b \cos c$:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.} \\ \text{Evenzoo heeft men} \\ \boldsymbol{\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.} \\ \boldsymbol{\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Opmerking. Omdat in bovenstaand bewijs b en c kleiner dan 90° ondersteld zijn, zullen wij moeten nagaan, of de formule algemeen geldt.

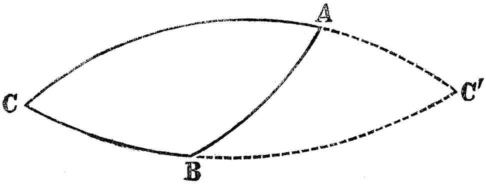


Fig. 45.

Zij in de eerste plaats $b > 90^\circ$, $c < 90^\circ$ (fig. 45).

Verleng CA en CB tot in het tegenpunt C′ van C. In driehoek ABC′ zijn AB en AC′ kleiner dan 90°; men heeft dus

$$\cos BC' = \cos AB \cos AC' + \sin AB \sin AC' \cos BAC'.$$

$$\cos(180^\circ - a) = \cos c \cos(180^\circ - b) + \sin c \sin(180^\circ - b) \cos(180^\circ - A),$$

of $\qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$

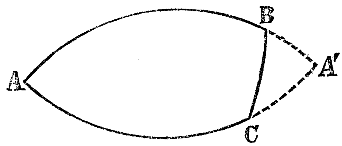


Fig. 46.

Zij in de tweede plaats b en c beide grooter dan 90° (fig. 46).

In den nevendriehoek A′BC zijn dan A′B en A′C beide kleiner dan 90°, dus

$$\cos BC = \cos A'B \cos A'C + \sin A'B \sin A'C \cos BA'C.$$

$$\cos a = \cos(180^\circ - c)\cos(180^\circ - b) + \sin(180^\circ - c)\sin(180^\circ - b)\cos A,$$

of $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Is $b \neq 90^\circ$, $c = 90^\circ$, is de driehoek dus rechtzijdig, dan gaat de formule over in

$$\cos a = \sin b \cos A,$$

en dit is een der formules van § 66.

Is $b = c = 90^\circ$, dan gaat de formule over in

$$\cos a = \cos A.$$

In dit geval is hoekpunt A een pool van BC, dus $A = a$.

De formule is dus algemeen geldig.

Ander Bewijs.

Zij ABC de boldriehoek. Laat uit C de hoogtelijn CD neer op AB, dan hebben wij:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos CD \cos BD = \cos CD \cos(AB - AD) \\ &= \cos CD \cos AB \cos AD + \cos CD \sin AB \sin AD. \\ &= \cos b \cos c + \cos CD \sin AB \sin AD. \end{aligned}$$

Verder is $\cos CD \cos AD = \cos b$

$$\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} b \cos A.$$

Door vermenigvuldiging $\cos CD \sin AD = \sin b \cos A$.

Derhalve vinden wij:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Valt de loodlijn CD aan den kant van CB buiten den driehoek dan gaat AB — AD over in AD — AB. De cosinussen van deze verschillen zijn gelijk en daardoor blijft de uitdrukking voor $\cos a$ hetzelfde. Valt de loodlijn aan den kant van CD buiten den driehoek, dan gaat AB — AD over in AB + AD. Daarom verandert het teeken van den term, waarin sin AB sin AD voorkomt, maar dit verandert later weer, omdat men krijgt $\cos (180^\circ - A)$.

Men kan de eigenschap ook bewijzen, door uit C een boog van 90° naar BA te trekken.

§ 71. Uitdrukking van den sinus van een hoek van een boldriehoek in de zijden.

Lost men uit de eerste formule van § 70 cos A op, dan komt er

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Verder is dan

$$\sin^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

De teller van deze breuk is een vorm, die in de boldriehoeksmeting veel voorkomt. Wij zullen hem gemakshalve voorstellen door $4n^2$, zoodat

$$\boldsymbol{n = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)}.} \quad {}^{*)}$$

Dan wordt $\quad \mathbf{\sin A} = \dfrac{2n}{\sin b \sin c},$

en evenzoo $\quad \mathbf{\sin B} = \dfrac{2n}{\sin c \sin a},$ $\quad \mathbf{\sin C} = \dfrac{2n}{\sin a \sin b}.$ $\quad \ldots \ldots \quad (2)$

*) Voor lezers, die bekend zijn met de theorie der determinanten, volgt hier de uitdrukking van $4n^2$ in determinantenvorm:

$$4n^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

Vraag. Waarom moet voor n steeds de positieve waarde genomen worden?

Men zou, als de zijden van een boldriehoek gegeven zijn, door middel van deze formules de hoeken kunnen berekenen. In de volgende paragrafen zullen echter andere formules worden afgeleid, die voor logarithmische berekening geschikt zijn.

§ 72. **Eigenschap. De sinussen der hoeken van een boldriehoek zijn evenredig met de sinussen der overstaande zijden. (Sinusregel).**

Bewijs.

Uit de formules (2) der vorige paragraaf volgt onmiddellijk

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{2n}{\sin a \sin b \sin c} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Opmerkingen. 1. De sinusregel is hier afgeleid uit den cosinusregel. De lezer beproeve een ander bewijs, waarbij door het teekenen van een hoogtelijn in een boldriehoek twee rechthoekige driehoeken ontstaan. Er zijn dan drie gevallen: de hoogtelijn kan binnen of buiten den driehoek vallen, of langs een zijde.

2. Men kan deze eigenschap ook bewijzen door middel van den correspondeerenden drievlakshoek aan het middelpunt van den bol.

§ 73. **Eigenschap. In een boldriehoek is**

$$\mathbf{tg\,\tfrac{1}{2}(A+B) : tg\,\tfrac{1}{2}(A-B) = tg\,\tfrac{1}{2}(\mathit{a}+\mathit{b}) : tg\,\tfrac{1}{2}(\mathit{a}-\mathit{b}).}$$

(tangensregel).

Bewijs.

Volgens den sinusregel is

$$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b,$$

waaruit volgt
$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b},$$

of
$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}.$$

Gevolg. Als in een boldriehoek de som van twee hoeken grooter dan, gelijk aan, of kleiner dan 180° is, is de som der overstaande zijden respectievelijk ook grooter dan, gelijk aan, of kleiner dan 180°, en omgekeerd.

Omdat nl. $A - B$ en $a - b$ kleiner dan 180° zijn, zijn $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$ en $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)$ positief. Dus hebben $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)$ en $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$ hetzelfde teeken, zoodat $\frac{1}{2}(A+B)$ en $\frac{1}{2}(a+b)$ beide òf grooter òf kleiner dan 90° zijn. $A + B$ en $a + b$ zijn dan gelijktijdig òf grooter òf kleiner dan 180°.

Is $a + b = 180^\circ$ en $a \neq b$, dus ook $A \neq B$, dan is de waarde van de tweede verhouding ∞, dus ook die van de eerste. Omdat $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) \neq o$ is, moet $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = \infty$ zijn, of $A + B = 180^\circ$.

Is $a + b = 180^\circ$, en $a = b$, dan is ieder dezer zijden 90°, en is hoekpunt C een pool van AB. Elk der hoeken A en B is dan 90°, hun som dus 180°.

§ 74. Uitdrukkingen voor den sinus, den cosinus en de tangens van de halve hoeken van een boldriehoek. (Formules van Euler).

Uit de eerste formule van § 70 volgt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

en omdat $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$,

$$\text{is} \quad 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \sin c}.$$

Stelt men nu $a + b + c = 2s$,

dan wordt $\frac{1}{2}(a - b + c) = s - b$, $\frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$,

$$\text{dus} \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}.$$

Men heeft dus

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}}, \\ \text{en evenzoo} \quad \sin \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - c)}{\sin a \sin c}}, \\ \sin \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - b)}{\sin a \sin b}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Om $\cos \frac{1}{2} A$ in de zijden uit te drukken, schrijve men

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(-a + b + c)}{\sin b \sin c}$$

of $$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}.$$

Men heeft dus

$$\left.\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Deelt men de formules (4) door de formules (5), dan komt het stel

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}}, \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-b)}}, \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin s \sin (s-c)}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Opmerking. Omdat de hoeken $\frac{1}{2}$A, $\frac{1}{2}$B. $\frac{1}{2}$C scherp zijn, moet in de formules (4), (5) en (6) de positieve wortel genomen worden.

§ 75. Andere gedaante voor n.

Substitueert men in de formule

$$\sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A$$

voor sin A de waarde uit § 71, en voor sin $\frac{1}{2}$ A en cos $\frac{1}{2}$ A de waarden uit § 74, dan komt er

$$\frac{2n}{\sin b \sin c} = \frac{2\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin b \sin c},$$

of $$n = \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}.$$

§ 76. Eigenschap. In elken boldriehoek is

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (7)$$

(Tweede cosinusregel).

Bewijs.

Door den eersten cosinusregel toe te passen op den pooldriehoek van ABC, krijgt men

$$\cos (180^\circ - A) = \cos (180^\circ - B) \cos (180^\circ - C) + \sin (180^\circ - B) \sin (180^\circ - C) \cos (180^\circ - a),$$

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

of $$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Ander Bewijs.

Zij ABC de boldriehoek. Trek uit C naar de basis AB een boog $CD = 90°$, dan hebben wij:

$$\cos A = - \cos D_1 \cos C_1 = \cos D_2 \cos (C - C_2) =$$
$$\cos D_2 \cos C \cos C_2 + \cos D_2 \sin C \sin C_2 =$$
$$- \cos B \cos C + \cos D_2 \sin C \sin C_2.$$

Verder is $\cos D_2 = - \dfrac{\cos B}{\cos C_2}$

$$\operatorname{tg} C_2 = - \cos a \operatorname{tg} B.$$

Door vermenigvuldiging: $\cos D_2 \sin C_2 = \sin B \cos a$.

Derhalve vinden wij:

$$\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Valt de boog CD aan den kant van CB buiten den driehoek, dan gaat $C - C_2$ over in $C + C_2$. Daardoor verandert het teeken van den 2den term in de uitdrukking voor $\cos (C - C_2)$, maar later heeft men ook te nemen $\operatorname{tg} (180° - B)$ en blijft de waarde voor $\cos A$ hetzelfde.

Valt de boog CD aan den kant van CA buiten den driehoek, dan gaat $C - C_2$ over in $C_2 - C$ en deze verschillen hebben gelijke cosinussen en zoo vinden wij ten slotte weer dezelfde uitdrukking voor $\cos A$.

Men kan de eigenschap ook bewijzen door uit C de loodlijn naar AB te trekken.

§ 77. Uitdrukkingen voor den sinus, den cosinus en de tangens van de halve zijden van een boldriehoek.

Daar de formules van § 76 telkens één zijde en drie hoeken bevatten, kunnen ze dienen, om de zijden in de hoeken uit te drukken.

Uit de eerste der formules (7) vindt men:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = 1 - \cos a = - \frac{\cos A + \cos (B + C)}{\sin B \sin C}$$

$$= - \frac{2 \cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (-A + B + C)}{\sin B \sin C}.$$

Stelt men $A + B + C = 2S$, dan wordt de laatste vergelijking,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = - \frac{\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}.$$

Men heeft dus $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}}$,

en evenzoo $\sin \frac{1}{2} b = \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - B)}{\sin C \sin A}}$,

$$\sin \frac{1}{2} c = \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - C)}{\sin A \sin B}}. \quad \ldots \quad (8)$$

Door middel van de identiteit $2 \cos^2 \frac{1}{2} a = 1 + \cos a$ vindt men

$$\left.\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} b &= \sqrt{\frac{\cos (S - C) \cos (S - A)}{\sin C \sin A}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} c &= \sqrt{\frac{\cos (S - A) \cos (S - B)}{\sin A \sin B}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Deelt men de formules (8) en (9) twee aan twee op elkaar, dan krijgt men

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - A)}{\cos (S - B) \cos (S - C)}}, \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} b &= \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - B)}{\cos (S - C) \cos (S - A)}}, \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c &= \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - C)}{\cos (S - A) \cos (S - B)}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Opmerkingen. 1. Hoewel in de formules (8) en (10) een minteeken onder den wortel staat, zijn die wortelvormen niet imaginair. Omdat nl. $A + B + C > 180°$ is, is $S > 90°$, dus $\cos S$ negatief.

2. De formules (8), (9) en (10) kunnen rechtstreeks uit die van § 74 afgeleid worden, door die toe te passen op den pooldriehoek.

3. Omdat $\frac{1}{2} a$, $\frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2} c$ scherp zijn, moet in de formules (8), (9) en (10) de positieve wortel genomen worden.

§ **78.** Substitueert men in $\sin a = 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$ voor $\sin \frac{1}{2} a$ en $\cos \frac{1}{2} a$ de in § 77 gevonden waarden, dan komt er

$$\sin a = \frac{2 \sqrt{- \cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}{\sin B \sin C},$$

of, als men den vaak voorkomenden vorm

$$\sqrt{- \cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)} = N$$

stelt:
$$\sin a = \frac{2 N}{\sin B \sin C}.$$

N kan in nog andere gedaante geschreven worden. *)

Men heeft: $2 \cos S \cos (S - A) = \cos (B + C) + \cos A,$

$$2 \cos (S - B) \cos (S - C) = \cos (B - C) + \cos A.$$

Door vermenigvuldiging dezer vergelijkingen komt er

$$\begin{aligned} -4N^2 &= \cos^2 A + \cos A \{\cos(B+C) + \cos(B-C)\} + \cos(B+C)\cos(B-C) \\ &= \cos^2 A + 2\cos A \cos B \cos C + \cos^2 B \cos^2 C - (1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C) \\ &= -1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C, \end{aligned}$$

of $\mathbf{N = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C)}}$.

§ 79. Eigenschap. Vermenigvuldigt men de cotangenten van een zijde en van een hoek, die tegenover elkaar staan, respectievelijk met de sinussen van een zijde en van een hoek, die niet tegenover elkaar staan, dan is het verschil dezer producten gelijk aan het product van de cosinussen van de laatstgenoemde zijde en hoek (cotangentenregel).

Bewijs.

Aangetoond moet worden, dat

$$\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C.$$

Substitueert men de waarden van $\cos c$ en $\sin c$ uit de formules

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

en $\sin c = \dfrac{\sin C}{\sin A} \sin a$ in

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, dan komt er

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \cos A \frac{\sin C}{\sin A} \sin a \\ &= \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin a \sin b \cot A \sin C. \end{aligned}$$

$$\cos a \sin^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin a \sin b \cot A \sin C,$$

of na deeling door $\sin a \sin b$, en overbrengen van een term:

$$\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C.$$

Men heeft dus het volgende stelsel formules:

$$\left.\begin{aligned} \cot a \sin b - \cot A \sin C &= \cos b \cos C. \\ \cot b \sin a - \cot B \sin C &= \cos a \cos C. \\ \cot b \sin c - \cot B \sin A &= \cos c \cos A. \\ \cot c \sin b - \cot C \sin A &= \cos b \cos A. \\ \cot c \sin a - \cot C \sin B &= \cos a \cos B. \\ \cot a \sin c - \cot A \sin B &= \cos c \cos B. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (11)$$

*) In determinantenvorm heeft men:

$$4N^2 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix}$$

Deze formules geven telkens een betrekking tusschen twee zijden, den ingesloten hoek, en den hoek tegenover een dezer zijden.

Opmerking. Past men een dezer formules toe op den pooldriehoek, dan komt een andere formule van hetzelfde stelsel te voorschijn

Betrekkingen tusschen vijf of zes elementen.

§ **80.** De in de voorgaande paragrafen bewezen formules maken het mogelijk, de onbekende elementen van een boldriehoek te bepalen, wanneer drie elementen gegeven zijn.

Omdat enkele van die formules niet voor logarithmische berekening geschikt zijn, zullen nog eenige betrekkingen afgeleid worden.

Zeer belangrijk zijn

De analogieën (of evenredigheden) van Neper.

Aldus noemt men de volgende formules.

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2} C, \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2} C, \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c, \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c,
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

en de daaruit door verwisseling der letters nog af te leiden formules. Hier volgt het

Bewijs.

Uit de formules (10) van § 77 volgt:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} b = -\frac{\cos S}{\cos (S-C)},$$

$$\frac{1-\operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b}{1+\operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b} = \frac{\cos (S-C)+\cos S}{\cos (S-C)-\cos S},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(2S-C) \cos \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2}(2S-C) \sin \frac{1}{2} C} = \cot \tfrac{1}{2}(A+B) \cot \tfrac{1}{2} C, \text{ of}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Om de tweede formule te bewijzen, merke men op, dat volgens (10) van § 77

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \;:\; \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b = \cos(S - A) \;:\; \cos(S - B),$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a + \operatorname{tg} \frac{1}{2}b}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a - \operatorname{tg} \frac{1}{2}b} = \frac{\cos(S - A) + \cos(S - B)}{\cos(S - A) - \cos(S - B)},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} = \frac{\cos \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}C \sin \frac{1}{2}(A - B)} = \cot \tfrac{1}{2}C \cot \tfrac{1}{2}(A - B), \text{ of}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}C.$$

De derde formule verkrijgt men door op te merken, dat volgens (6) van § 74

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s - c)}{\sin s},$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B} = \frac{\sin s - \sin(s - c)}{\sin s + \sin(s - c)},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(a + b)} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \cot \tfrac{1}{2}(a + b), \text{of}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c.$$

Ten slotte de vierde formule,
Uit (6) van § 74 volgt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \;:\; \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B = \sin(s - b) \;:\; \sin(s - a),$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A + \operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A - \operatorname{tg} \frac{1}{2}B} = \frac{\sin(s - b) + \sin(s - a)}{\sin(s - b) - \sin(s - a)},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(a - b)} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \cot \tfrac{1}{2}(a - b), \text{ of}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c.$$

Opgave. Leidt uit de analogieën van Neper af: $A + B$ en $a + b$ zijn gelijktijdig $> 180°$, $= 180°$, of $< 180°$.

Opmerkingen. 1. Past men de analogieën van Neper toe op den pooldriehoek, dan gaan de eerste en de derde, en ook de tweede en vierde formule in elkaar over.

2. Door toepassing van de formules (12) op den nevendriehoek ABC′ blijven ze onveranderd.

3. Past men ze toe op den nevendriehoek AB′C, dan gaan de eerste en de tweede, en eveneens de derde en de vierde formule in elkaar over.

§ 81. Formules van Delambre.

Deze zijn

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

en de hieruit door verwisseling van letters nog af te leiden formules.

Bewijs.

Men heeft

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B.$$

Substitueert men hierin de waarden van $\sin\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}A$ en $\cos\frac{1}{2}B$ uit § 74, dan komt er

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}} + \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$= \frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C, \text{ of}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

De overige formules worden op gelijksoortige manier bewezen.

Opmerkingen. 1. De analogieën van Neper kunnen onmiddellijk afgeleid worden door de formules van Delambre twee aan twee op elkaar te deelen.

Omgekeerd kunnen de formules van Delambre afgeleid worden uit die van Neper. Dit laatste echter kost meer moeite.

2. Past men de eerste en de vierde der formules (13) toe op den pooldriehoek, dan gaan ze in elkaar over. Daarentegen blijven de tweede en de derde onveranderd.

3. Past men de formules (13) toe op den nevendriehoek ABC′, dan blijven ze alle onveranderd.

4. Past men ze toe op den nevendriehoek AB′C, dan gaan de eerste en de vierde, en ook de tweede en de derde in elkaar over.

§ **82.** De formules van Delambre en Neper zijn zoo belangrijk, dat in deze paragraaf er een meetkundig bewijs van gegeven zal worden.

Zij ABC (fig. 47) een boldriehoek, DE de middelloodlijn van AB, CE de buitenbissectrix van $\angle$ C; EF en EG zijn respectievelijk loodrecht op AC en BC getrokken. Omdat E op de buitenbissectrix ligt, is EF $=$ EG. Ook ligt E op de middelloodlijn van AB, dus EA $=$ EB. De driehoeken AEF en BEG zijn nu gelijk en gelijkvormig (§ 13), zoodat $\angle$ EAF $=$ $\angle$ EBG. De som van de basishoeken van den gelijkbeenigen boldriehoek EAB is dus gelijk aan A $+$ B, derhalve

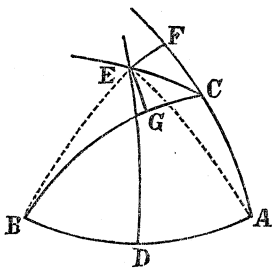


Fig. 47.

$$\angle \mathrm{EAB} = \angle \mathrm{EBA} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$
en
$$\angle \mathrm{EAF} = \angle \mathrm{EBG} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}).$$

De driehoeken EFC en EGC zijn ook gelijk en gelijkvormig (§ 13), dus CF $=$ CG, en omdat BG $=$ AF, is

$$a - \mathrm{CG} = b + \mathrm{CF} = b + \mathrm{CG},$$
dus
$$\mathrm{CG} = \mathrm{CF} = \tfrac{1}{2}(a-b),$$
en
$$\mathrm{AF} = \mathrm{BG} = \tfrac{1}{2}(a+b).$$

Uit de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken AEF en BEG volgt successievelijk

$$\angle \mathrm{AEF} = \angle \mathrm{BEG},$$
$$\angle \mathrm{GEF} = \angle \mathrm{BEA},$$
dus
$$\angle \mathrm{CEF} = \angle \mathrm{AED}.$$

De rechthoekige boldriehoeken CEF en AED hebben dus in E een gelijken hoek, waaruit volgt:

$$\cos \mathrm{FC} \sin \mathrm{ECF} = \cos \mathrm{CEF} = \cos \mathrm{AED} = \cos \mathrm{AD} \sin \mathrm{EAD},$$
of
$$\cos \tfrac{1}{2}(a-b) \sin \tfrac{1}{2}(180^\circ - \mathrm{C}) = \cos \tfrac{1}{2}c \sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$
dus
$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\cos \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c}.$$

Dit is de eerste formule van Delambre.

Verder is in $\triangle$ AEF:

$$\sin \mathrm{AF} = \cot \mathrm{EAF} \operatorname{tg} \mathrm{EF},$$
of
$$\sin \tfrac{1}{2}(a+b) = \cot \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \operatorname{tg} \mathrm{EF},$$

en in $\triangle$ ECF:

$$\sin \mathrm{CF} = \cot \mathrm{ECF} \operatorname{tg} \mathrm{EF},$$
of
$$\sin \tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{C} \operatorname{tg} \mathrm{EF}.$$

Door eliminatie van $\operatorname{tg} EF$ komt er:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}$$

of $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}C,$$

dat is een der analogieën van Neper.

De andere formules van Delambre en Neper worden op soortgelijke manier afgeleid.

§ **83**. Men kan nog andere betrekkingen tusschen vijf of zes elementen van een boldriehoek afleiden, door b.v. de waarde van $\cos c$ uit

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

te substitueeren in

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Er komt:

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$

of $\cos a \sin^2 b - \sin a \sin b \cos b \cos C = \sin b \sin c \cos A,$

of $\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C = \sin c \cos A.$

Men heeft dus het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}
\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C &= \sin c \cos A,\\
\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C &= \sin c \cos B,\\
\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A &= \sin a \cos B,\\
\cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A &= \sin a \cos C,\\
\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B &= \sin b \cos C,\\
\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B &= \sin b \cos A.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (14)$$

Omdat deze vergelijkingen homogeen zijn ten opzichte van $\sin a$, $\sin b$ en $\sin c$, mag men deze grootheden volgens den sinusregel vervangen door $\sin A$, $\sin B$ en $\sin C$. Men verkrijgt zoo het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}
\cos a \sin B - \cos b \cos C \sin A &= \cos A \sin C,\\
\cos b \sin A - \cos a \cos C \sin B &= \cos B \sin C,\\
\cos b \sin C - \cos c \cos A \sin B &= \cos B \sin A,\\
\cos c \sin B - \cos b \cos A \sin C &= \cos C \sin A,\\
\cos c \sin A - \cos a \cos B \sin C &= \cos C \sin B,\\
\cos a \sin C - \cos c \cos B \sin A &= \cos A \sin B.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (15)$$

Nog zullen wij afleiden de eerste van het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}
\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A &= \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a,\\
\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C &= \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c,\\
\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B &= \sin C \sin A - \cos C \cos A \cos b,
\end{aligned}\right\} \; (16)$$

die een betrekking tusschen de zes elementen geven. Men heeft

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Vermenigvuldig deze vergelijkingen met $\cos A$ en $\cos a$, en trek af. Er komt

$$\sin b \sin c \cos^2 A + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C \cos^2 a - \cos B \cos C \cos a.$$

Vervang $\cos^2 A$ en $\cos^2 a$ door $1 - \sin^2 A$ en $1 - \sin^2 a$:

$$\sin b \sin c - \sin b \sin c \sin^2 A + \cos b \cos c \cos A =$$
$$= \sin B \sin C - \sin B \sin C \sin^2 a - \cos B \cos C \cos a.$$

Omdat

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

is $$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin B \sin C}{\sin b \sin c}.$$

dus $$\sin b \sin c \sin^2 A = \sin B \sin C \sin^2 a.$$

De vergelijking gaat dus over in

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a.$$

§ 84. Formules van Reidt.

Stelt men $A + a = 4s$, $\quad B + b = 4s_1$, $\quad C + c = 4s_2$,
$A - a = 4v$, $\quad B - b = 4v_1$, $\quad C - c = 4v_2$,

dan zijn de formules van Reidt:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}^2(45^\circ - s_2) = \cot(s - s_1)\operatorname{tg}(s + s_1)\operatorname{tg}(v - v_1)\operatorname{tg}(v + v_1),\\
&\operatorname{tg}^2(45^\circ - v_2) = \operatorname{tg}(s - s_1)\operatorname{tg}(s + s_1)\cot(v - v_1)\operatorname{tg}(v + v_1),\\
&\operatorname{tg}^2 v_2 = \operatorname{tg}(45^\circ - s - v_1)\operatorname{tg}(45^\circ - s + v_1)\operatorname{tg}(45^\circ - v - s_1)\operatorname{tg}(45^\circ + v - s_1),\\
&\operatorname{tg}^2 s_2 = \operatorname{tg}(45^\circ - s - v_1)\operatorname{tg}(45^\circ + s - v_1)\operatorname{tg}(45^\circ - v - s_1)\operatorname{tg}(45^\circ - v + s_1).
\end{aligned}\right\} (17)$$

Bewijs.

Uit de tweede formule van Delambre (§ 81) leidt men af

$$\frac{\cos \frac{1}{2}C - \sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}C + \sin \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B) - \sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(A - B) + \sin \frac{1}{2}(a - b)}.$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \frac{1}{2}C) - \sin \frac{1}{2}c}{\sin(90^\circ - \frac{1}{2}C) + \sin \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B) - \sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(A - B) + \sin \frac{1}{2}(a - b)}.$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{4}C - \tfrac{1}{4}c)\cot(45^\circ - \tfrac{1}{4}C + \tfrac{1}{4}c) =$$
$$= \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{4}B - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{4}b)\cot(\tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{4}b),$$

of $$\operatorname{tg}(45^\circ - s_2)\cot(45^\circ - v_2) = \operatorname{tg}(v - v_1)\cot(s - s_1) \quad . (18)$$

Uit de derde, eerste en vierde formule van Delambre volgt op gelijke wijze

$$\operatorname{tg}(45^\circ - s_2)\operatorname{tg}(45^\circ - v_2) = \operatorname{tg}(v + v_1)\operatorname{tg}(s + s_1) \quad . \quad . (19)$$

$$\operatorname{tg} v_2 \operatorname{tg} s_2 = \operatorname{tg}(45^\circ - s - v_1) \operatorname{tg}(45^\circ - v - s_1) \quad . \quad . \; (20)$$
$$\operatorname{tg} v_2 \cot s_2 = \operatorname{tg}(45^\circ - s + v_1) \cot(45^\circ - v + s_1) \quad . \quad . \; (21)$$

Uit de formules (18) en (19) volgt nu

$$\operatorname{tg}^2(45^\circ - s_2) = \cot(s - s_1) \operatorname{tg}(s + s_1) \operatorname{tg}(v - v_1) \operatorname{tg}(v + v_1),$$

dat is de eerste der formules (17).

Door deeling van (18) en (19) ontstaat:

$$\operatorname{tg}^2(45^\circ - v_2) = \operatorname{tg}(s - s_1) \operatorname{tg}(s + s_1) \cot(v - v_1) \operatorname{tg}(v + v_1),$$

dat is de tweede der formules (17).

Door vermenigvuldiging en deeling van de overeenkomstige leden van (20) en (21) ontstaan de andere formules van Reidt.

§ **85.** *Voorbeelden van afleiding van formules en eigenschappen.*

Eerste voorbeeld. Als van een boldriehoek $A + B + C = 360^\circ$ is, dan is

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} b + \sin^2 \tfrac{1}{2} c = 2.$$

Volgens een bekende formule is

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C},$$

en omdat $S = 180^\circ$, wordt

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos A}{\sin B \sin C} = -\frac{\cos(B + C)}{\sin B \sin C}$$
$$= -\cot B \cot C + 1.$$

Men heeft dus

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} b + \sin^2 \tfrac{1}{2} c = 3 - \cot B \cot C - \cot C \cot A - \cot A \cot B$$
$$= 3 - \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$
$$= 3 - \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} \left(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} \right)$$
$$= 3 - \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} \times \frac{-\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$
$$= 3 + \frac{1}{\operatorname{tg} C} \operatorname{tg}(A + B) = 3 - 1 = 2.$$

Opgave. Leidt uit de bovengevonden formule

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$$

af, dat in een driehoek, waarvan $A + B + C = 360^\circ$, elk der hoeken stomp is.

Een tweede bewijs voor de gevraagde betrekking is het volgende.

Men heeft
$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2} C},$$

en
$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

Na vermenigvuldiging en herleiding volgt hieruit

$$\frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c} = \frac{\sin(A + B)}{\sin C} = \frac{-\sin C}{\sin C} = -1.$$

$$\cos a + \cos b = -1 - \cos c$$

$$\cos a + \cos b + \cos c = -1.$$

$$(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a) + (1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}b) + (1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}c) = -1.$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a + \sin^2 \tfrac{1}{2}b + \sin^2 \tfrac{1}{2}c = 2.$$

Tweede voorbeeld. Bewijs, dat in elken boldriehoek

$$\sin a \sin(B - C) + \sin b \sin(C - A) + \sin c \sin(A - B) = 0.$$

Omdat
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

zal het voldoende zijn aan te toonen, dat

$$\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) = 0.$$

Om dit te bewijzen, vermenigvuldige men het eerste lid met 2, en verandere elk product in een verschil van twee cosinussen. Men verkrijgt dan

$$\begin{aligned} 2\sin A \sin(B - C) &= \cos 2(S - B) - \cos 2(S - C). \\ 2\sin B \sin(C - A) &= \cos 2(S - C) - \cos 2(S - A). \\ 2\sin C \sin(A - B) &= \cos 2(S - A) - \cos 2(S - B). \\ \hline \text{som} &= 0. \end{aligned}$$

Derde voorbeeld, Bewijs, dat in elken boldriehoek

$$2\cos \tfrac{1}{2}(a + b)\cos \tfrac{1}{2}(a - b)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c = \sin a \cos B + \sin b \cos A.$$

Vermenigvuldigt men de volgende formules van Delambre

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}C}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

met elkaar, dan komt er

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos^2 \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C},$$

$$\begin{aligned} 2\cos \tfrac{1}{2}(a + b)\cos \tfrac{1}{2}(a - b)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}c\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}\sin(A + B) \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}\sin(A + B) \\ &= \frac{\sin c}{\sin C}\sin(A + B) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin c \sin A \cos B}{\sin C} + \frac{\sin c \cos A \sin B}{\sin C}$$

$$= \frac{\sin a \sin A \cos B}{\sin A} + \frac{\sin b \cos A \sin B}{\sin B}$$
$$= \sin a \cos B + \sin b \cos A.$$

Vierde voorbeeld. Van een boldriehoek ABC is $a > b$. *Uit C als pool met b als spherische straal beschrijft men een kleinen cirkel, die AB in A en A′ snijdt. Als* $A'B = c'$, *bewijs dan, dat*

$$tg\, \tfrac{1}{2}c\, tg\, \tfrac{1}{2}c' = tg\, \tfrac{1}{2}(a+b)\, tg\, \tfrac{1}{2}(a-b).$$

Trekt men de hoogtelijn CD, dan is in de rechthoekige boldriehoeken A′CD en BCD:

$$\cos CD = \frac{\cos A'C}{\cos A'D} = \frac{\cos BC}{\cos BD},$$

of
$$\frac{\cos b}{\cos \frac{1}{2}(c-c')} = \frac{\cos a}{\cos \frac{1}{2}(c+c')}.$$

$$\frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(c-c')}{\cos \frac{1}{2}(c+c')} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}c \operatorname{tg} \frac{1}{2}c'}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}c \operatorname{tg} \frac{1}{2}c'},$$

$$\frac{\cos b + \cos a}{\cos b - \cos a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c \operatorname{tg} \frac{1}{2}c'}.$$

$$\cot \tfrac{1}{2}(a+b) \cot \tfrac{1}{2}(a-b) = \cot \tfrac{1}{2}c \cot \tfrac{1}{2}c',$$

of
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c' = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b).$$

Vijfde voorbeeld.

Eigenschap. Als twee boldriehoeken twee zijden gelijk hebben, doch de ingesloten hoek in den eersten driehoek grooter is dan die in den tweeden, dan is de derde zijde van den eersten driehoek ook grooter dan die van den tweeden.

Bewijs.

Laten a en b de gelijke zijden zijn, C en C′ de ongelijke ingesloten hoeken, c' en c' de daartegenover gelegen zijden. Volgens den eersten cosinusregel is

$$\cos' c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$
$$\cos' c' = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C',$$
$$\cos c - \cos c' = \sin a \sin b (\cos C - \cos C'),$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(c+c') \sin \tfrac{1}{2}(c-c') = \sin a \sin b \sin \tfrac{1}{2}(C+C') \sin \tfrac{1}{2}(C-C').$$

Omdat de elementen c, c', C en C′ alle kleiner dan 180° zijn, is dit ook het geval met $\frac{1}{2}(c+c')$ en $\frac{1}{2}(C+C')$.

Hieruit volgt, dat $\sin \frac{1}{2}(c-c')$ en $\sin \frac{1}{2}(C-C')$ hetzelfde teeken hebben, en dat dus $\frac{1}{2}(c-c')$ en $\frac{1}{2}(C-C')$ òf beide positief, òf beide negatief zijn. Daarom is $c \lessgtr c'$, al naar $C \lessgtr C'$ is

Opmerking. Het bewijs van deze eigenschap kan ook langs zuiver meetkundigen weg geleverd worden.

§ 86. Een en ander over de functies *n* en N.

In de paragrafen 71, 75 en 78 zijn de vormen

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c)} =$$
$$= \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}$$

en $$\tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2 \mathrm{A} - \cos^2 \mathrm{B} - \cos^2 \mathrm{C} - 2\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C})} =$$
$$= \sqrt{- \cos \mathrm{S} \cos (\mathrm{S} - \mathrm{A}) \cos (\mathrm{S} - \mathrm{B}) \cos (\mathrm{S} - \mathrm{C})},$$

respectievelijk voorgesteld door n en N.

Bepaalt men de waarde van n voor den pooldriehoek, dan komt er

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\{1 - \cos^2 (180^\circ - \mathrm{A}) - \cos^2 (180^\circ - \mathrm{B}) - \cos^2 (180^\circ - \mathrm{C}) +}$$
$$+ 2 \cos (180^\circ - \mathrm{A}) \cos (180^\circ - \mathrm{B}) \cos (180^\circ - \mathrm{C})\} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2 \mathrm{A} - \cos^2 \mathrm{B} - \cos^2 \mathrm{C} - 2 \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C})} = \mathrm{N}.$$

Hierdoor gaat dus n over in N; evenzoo gaat N over in n.

In § 71 en § 78 werd gevonden

$$\sin \mathrm{A} = \frac{2n}{\sin b \sin c}, \quad \sin a = \frac{2\mathrm{N}}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}},$$

zoodat

$$\mathbf{2n = \sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin a \sin b \sin C}$$
$$\mathbf{2N = \sin B \sin C \sin a = \sin C \sin A \sin b = \sin A \sin B \sin c.}$$

Hieruit volgt, dat n en N niet negatief kunnen zijn.

Omdat volgens de laatste vergelijkingen n en N producten van sinussen zijn, is $\frac{1}{2}$ de grootste waarde van n en N.

Men heeft dus

$$0 < n \leqq \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \mathrm{N} \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Deze maximumwaarde wordt bereikt, als alle elementen van den boldriehoek 90° zijn.

Verder is $\dfrac{\sin \mathrm{A}}{\sin a} = \dfrac{\sin \mathrm{B}}{\sin b} = \dfrac{\sin \mathrm{C}}{\sin c} = \dfrac{\mathrm{N}}{n} = \dfrac{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}{2n}$.

In 't vervolg wordt de waarde van elk dezer verhoudingen voorgesteld door M (M heet de modulus van den boldriehoek). Men heeft dan ook

$$\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{C}} = \frac{\sin c}{\sin \mathrm{C}} = \frac{n}{\mathrm{N}} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{2n} = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

Men heeft verder

$$\mathrm{N} = \frac{2n^2}{\sin a \sin b \sin c}, \quad n = \frac{2\mathrm{N}^2}{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}.$$

De functies n en N kunnen nog in verschillende andere gedaanten geschreven worden. Eenige merkwaardige zijn

$$n = \frac{2}{-\operatorname{tg} S + \operatorname{tg}(S-A) + \operatorname{tg}(S-B) + \operatorname{tg}(S-C)} = -\frac{\cos a + \cos b + \cos c - 1}{2 \operatorname{tg} S}.$$

$$N = \frac{2}{-\cot s + \cot(s-a) + \cot(s-b) + \cot(s-c)} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{2 \cot s}.$$

Omtrent de waarde van M zullen wij nog de volgende stelling bewijzen:

Is $M \geqq 1$, dan zijn de drie **zijden** *van den boldriehoek scherp, òf één is scherp en de beide andere zijn stomp.*

Is $M \leqq 1$, dan zijn de drie **hoeken** *van den boldriehoek stomp, òf één is stomp en de beide andere zijn scherp.*

Uit de formule $\sin A = \dfrac{2n}{\sin b \sin c}$ leidt men nl. af

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = M^2 = \frac{4n^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

of

$$\begin{aligned} 2 \cos a \cos b \cos c &= M^2 \sin^2 b \sin^2 c - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c \\ &= (M^2 - 1) \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c \\ &= (M^2 - 1) \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a (1 - \sin^2 b \sin^2 c) - 1 + \sin^2 b \sin^2 c \\ &\quad + \cos^2 b + \cos^2 c, \text{ of} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos a \cos b \cos c &= (M^2 - 1) \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a (1 - \sin^2 b \sin^2 c) \\ &\quad + \cos^2 b \cos^2 c. \end{aligned}$$

Is nu $M \geqq 1$, dan is het tweede lid, dus ook het eerste positief, dus $\cos a \cos b \cos c > 0$, waaruit volgt, dat òf de drie zijden scherp zijn, òf een zijde scherp is en de andere stomp zijn.

Past men het eerste gedeelte van deze stelling toe op den pooldriehoek, dan vindt men het tweede deel.

Opmerking. Op voorstel van *Von Staudt* noemt men $2n$ den sinus van den boldriehoek en 2N den sinus van den pooldriehoek.

Het gebruik van deze benamingen kan later eenig gemak opleveren.

§ 87. Vraagstukken.

In iederen boldriehoek is

1. $\dfrac{\sin(A \pm B)}{\sin C} = \dfrac{\cos a \pm \cos b}{\cos c \pm 1}$; $\dfrac{\sin(a \pm b)}{\sin c} = \dfrac{\cos B \pm \cos A}{1 \mp \cos C}$ (§ 81).

2. $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - a)} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B + b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B - b)}$ (§ 72).

3. $\dfrac{\cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} b}{\cos^2 \frac{1}{2} c} = \dfrac{\sin (A + B)}{\sin C}$;

$\dfrac{\cos^2 \frac{1}{2} B - \cos^2 \frac{1}{2} A}{\cos^2 \frac{1}{2} C} = \dfrac{\sin (a - b)}{\sin c}$.

4. $\sin a = \dfrac{\sin (s - a) \sin \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C} = \dfrac{\sin (s - b) \cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}$;

$\sin A = \dfrac{\cos (S - A) \cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \dfrac{\cos (S - B) \sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$ (§ 74, 77).

5. $\cos^2 \frac{1}{2} (B + C) + \sin B \sin C \sin^2 \frac{1}{2} a = \sin^2 \frac{1}{2} A$;
$\cos^2 \frac{1}{2} (b - c) - \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2} A = \cos^2 \frac{1}{2} a$. (§ 74, 77).

6. $\cos A + \cos B = \dfrac{2 \sin (a + b)}{\sin c} \sin^2 \frac{1}{2} C$.

7. $\operatorname{tg} C (\cos a \cos b - \cot A \cot B) = \cot A \cos a + \cot B \cos b$;
$\operatorname{tg} c \, (1 - \cos A \cos B \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b) = \cos A \operatorname{tg} b + \cos B \operatorname{tg} a$.

8. $\cos^2 \frac{1}{2} (b - c) \cos^2 \frac{1}{2} A + \cos^2 \frac{1}{2} (b + c) \sin^2 \frac{1}{2} A = \cos^2 \frac{1}{2} a$;
$\sin^2 \frac{1}{2} (b - c) \cos^2 \frac{1}{2} A + \sin^2 \frac{1}{2} (b + c) \sin^2 \frac{1}{2} A = \sin^2 \frac{1}{2} a$. (§ 81).

9. $\dfrac{\cos B \cot b + \cos C \cot c}{\cot b \cot c - \cos B \cos C} = \operatorname{tg} a$.

10. $\cos s = \dfrac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}$;

$\cos (s - a) = \dfrac{- \cos A + \cos B + \cos C + 1}{4 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$;

$\sin S = \dfrac{\cos a + \cos b + \cos c - 1}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$;

$\sin (S - A) = \dfrac{\cos a - \cos b - \cos c + 1}{4 \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}$. (Zie n° 1).

11. $\dfrac{\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \dfrac{1 - \cos a \cos b \cos c}{1 + \cos A \cos B \cos C}$.

12. $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c - \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cos A - \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cos B}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} b - \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cos A - \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cos C} = \dfrac{\cos (B - A)}{\cos (C - A)}$.

13. Als de basis en de omtrek van een boldriehoek constant zijn, dan is het product van de tangenten der halve basishoeken ook constant. Bewijs dit.

14. Als in een boldriehoek
1e $a + c = 2b$, dan is $\sin^2 \frac{1}{2} B = \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (A - C)$.
2e $A + C = 2B$, dan is $\cos^2 \frac{1}{2} b = \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a - c)$.
Bewijs dit.

15. Van twee boldriehoeken ABC en A'B'C' is $C = C'$ en $A - B = A' - B'$. Bewijs dat

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a' : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b'.$$

16. Als $A + a = 180^\circ$, dan is

$$\sin a = \frac{\sin b + \sin c}{1 + \sin b \sin c}.$$

17. In een gelijkzijdigen boldriehoek is

1e $2 \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}A = 1$;

2e $\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}a = 1 - 2 \cos A$;

3e $\sec A = 1 + \sec a$;

4e $\cos a - \cos A = \cos a \cos A$.

Tot welke grens nadert de hoek van een gelijkzijdigen boldriehoek, als de zijde tot nul nadert?

18. In elken boldriehoek is

$$\left(\frac{\sin \tfrac{1}{2}a}{\sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}\right)^2 = \cot^2 \tfrac{1}{2}b + \cot^2 \tfrac{1}{2}c - 2 \cot \tfrac{1}{2}b \cot \tfrac{1}{2}c \cos A.$$

19. Uit een punt P van de basis van een gelijkbeenigen boldriehoek laat men spherische loodlijnen neer op de beenen. Bewijs, dat de sinussen dezer loodlijnen zich verhouden als de sinussen der deelen, waarin P de basis verdeelt.

20. Uit een punt P op het boloppervlak laat men spherische loodlijnen PD, PE en PF op de zijden BC, CA en AB neer. Bewijs, dat

$$\frac{\cos FA}{\cos FB} \times \frac{\cos DB}{\cos DC} \times \frac{\cos EC}{\cos EA} = 1,$$

en onderzoek of het omgekeerde hiervan waar is.

21. Op een bol ligt tusschen de punten A en B op den grooten cirkel door A en B het punt C en op denzelfden grooten cirkel in 't verlengde van AB het punt D. Een willekeurig punt O op den bol is door bogen van groote cirkels met A, B, C en D verbonden. Gegeven is verder, dat

$$\sin CA : \sin CB = \sin DA : \sin DB.$$

Bewijs, dat $\sin COA : \sin COB = \sin DOA : \sin DOB$.

(Toel. ex. Univ. 1908.)

22. Als in een boldriehoek $A + B = C$, dan is

a. $\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}C = \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + b)}$.

b. $\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}A = \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(c - b)}{\sin \tfrac{1}{2}(c + b)}$,

c. $\sin^2 \frac{1}{2}a = \sin \frac{1}{2}(c + b) \sin \frac{1}{2}(c - b)$;
d. $\cos^2 \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$;
e. $\cos a + \cos b - \cos c = 1$;
f. $\sin^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}b = \sin^2 \frac{1}{2}c$;
g. $\sin^2 \frac{1}{2}a = -\cot B \cot C$;
h. $\cos^2 \frac{1}{2}c = \cot A \cot B$;
i. $\cos C = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b$.

23. Als in een boldriehoek $\cos C = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b$, vraagt men te bewijzen: $\cos a + \cos b - \cos c = 1$. (Toel. ex. Univ. 1909).

24. Als in een boldriehoek $A + B + C = 360°$, dan is
a. $\cos A = -\cot \frac{1}{2}b \cot \frac{1}{2}c$;
b. $\cos \frac{1}{2}a = \cot B \cot C$;
c. $\cos^2 \frac{1}{2}c = -\cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$;
d. $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}A = -\dfrac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)}$.

25. Als $\sin^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}b + \sin^2 \frac{1}{2}c = 2$, dan is $A + B + C = 360°$. Bewijs dit.

26. Als in een boldriehoek $a + b + c = 180°$, dan is
a. $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$;
b. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = \sqrt{\cos a \cos b \cos c}$;
c. $\cos A + \cos B + \cos C = 1$.

27. Op de zijden AB en AC van een gelijkzijdigen boldriehoek ABC (zijde $= a$) neemt men punten P en Q zoo, dat $AP = \frac{1}{4}AB$, $AQ = \frac{1}{4}AC$. Bewijs, dat

$$\sin \tfrac{1}{2}PQ = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{4 \cos \frac{1}{4}a}.$$

28. De zijde AB van boldriehoek ABC wordt door CD ($\perp$ AB) in twee stukken AD en BD verdeeld.
Bewijs, dat $\operatorname{tg} AD : \operatorname{tg} BD = \cos a \cot A : \cos b \cot B$.

29. Men trekt in boldriehoek ABC den boog CD $\perp$ AB, noemt $\angle ACD = x$, $\angle BCD = y$, $AD = \alpha$, $BD = \beta$. Bewijs, dat

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \frac{\sin (B - A)}{\sin (B + A)};$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C \frac{\sin (b - a)}{\sin (b + a)};$$

$$\frac{\sin (x - y)}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{\sin A}{\sin a}.$$

30. Gegeven zijn de elementen a, b, c, A, B, C van een boldriehoek. Men construeert een boldriehoek met de zijden $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$.

Als φ de hoek is, ingesloten door $\frac{1}{2}a$ en $\frac{1}{2}b$, bewijs dan, dat

$$\sin^2 \varphi + 2 \frac{\cos (S - C)}{\cos S} \cos \varphi - \frac{2 \cos (S - C) \cos C}{\cos S} = 0.$$

31. Op een halven grooten cirkel AA′ (A en A′ zijn tegenpunten) neemt men een punt B en construeert op AB en A′B op dezelfde bolheft twee gelijkzijdige boldriehoeken ABC en A′BD. Als a de zijde is van een dezer driehoeken, bewijs dan, dat $\sin CD = \pm 2 \cos a$.

32. Van een boldriehoek ABC is gegeven: $A - B = 90°$. Bewijs, dat tusschen de elementen van dien driehoek de betrekking

$$\frac{\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}a - \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}b}{\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}a + \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}b} = \sin C$$

bestaat, en onderzoek of ook het omgekeerde waar is.

(Ex. Adsp. Landmeter 1912).

33. ABC′ is een nevendriehoek van ABC. De spherische middelloodlijnen van AC en AC′ snijden BC of haar verlengde in P en Q. Bewijs, dat

$$\mathrm{tg}\, PQ = \frac{2 \cos C}{\sin b \sin^2 C}.$$

34. D en E zijn de middens van BC en AC. De mediaan uit C van boldriehoek CDE snijdt AB in P. Bewijs, dat

$$\sin PA : \sin PB = \sec \tfrac{1}{2}a : \sec \tfrac{1}{2}b.$$

35. Men deelt de basis van een boldriehoek door een grooten cirkel loodrecht middendoor. Vervolgens teekent men een grooten cirkel loodrecht op deze middelloodlijn. Bewijs, dat deze groote cirkel de opstaande zijden van den boldriehoek in deelen verdeelt, waarvan de sinussen evenredig zijn.

36. C_1 en C_2 zijn twee punten op de basis AB van een boldriehoek ABC, even ver van het midden van die basis verwijderd. Uit C_1 laat men op BC en AC resp. de loodlijnen x_1 en x_2 neer, uit C_2 op diezelfde zijden de loodlijnen y_1 en y_2. Bewijs, dat

$$\sin x_1 \sin x_2 = \sin y_1 \sin y_2.$$

B. **Berekeningen.**

§ 88. Bij de oplossing der scheefhoekige boldriehoeken, d.i. het bepalen van de onbekende elementen uit drie gegevens, onderscheidt men de volgende gevallen. Gegeven zijn:

1e de drie zijden;
2e de drie hoeken;
3e twee zijden en den ingesloten hoek;
4e een zijde en de aanliggende hoeken;
5e twee zijden en een hoek tegenover een dezer zijden;
6e twee hoeken en een zijde tegenover een dezer hoeken.

Het is niet noodzakelijk al deze gevallen afzonderlijk te behandelen. Kent men nl. de oplossingen der gevallen 1, 3 en 5, dan kunnen die van de gevallen 2, 4 en 6 door middel van den pooldriehoek daartoe herleid worden. Alle zes gevallen zullen hier echter afzonderlijk worden nagegaan.

§ 89. Eerste geval. Gegeven: a, b, c.
Gevraagd: A, B, C.
Berekening.

Ter berekening van $\angle$ A heeft men de beschikking over de volgende formules:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin b \sin c};$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a)}}{\sin b \sin c};$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin s \sin (s-a)};$$

$$\sin A = \frac{2n}{\sin b \sin c}.$$

De eerste formule is niet geschikt voor logarithmische berekening; met de overige is dit wel het geval.

De laatste formule heeft het nadeel, dat ze voor A twee supplementaire waarden geeft. De tweede en derde formule hebben dit tegen, dat, als men ook de hoeken B en C moet berekenen, men de logarithmen der sinussen van a, b, c, s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ moet opzoeken, alzoo zeven logarithmen. De vierde formule is de beste, ook, omdat een hoek door de tangens het nauwkeurigst kan bepaald worden. Herleidt men haar tot den vorm

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{\sin (s-a)} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}},$$

dan is de vorm onder het wortelteeken een uitdrukking symmetrisch in a, b, c en s.

Stelt men nu

$$\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}=w,$$

dan is

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A=\frac{w}{\sin(s-a)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B=\frac{w}{\sin(s-b)},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C=\frac{w}{\sin(s-c)}.$$

Discussie. Volgens § 14 en § 16 moet de som der zijden kleiner dan 360°, en iedere zijde kleiner dan de som der beide andere zijn. Is nu de grootste zijde kleiner dan de som der beide andere zijden, dan is dit zeker het geval met de beide andere.

De gegevens moeten dus voldoen aan de volgende voorwaarden:

som der zijden $<$ *360°;*

grootste zijde $<$ *som der beide andere.*

Omdat twee boldriehoeken gelijk en gelijkvormig zijn, als zij de drie zijden gelijk hebben, *is er met de gegevens slechts één driehoek mogelijk.*

Eerste voorbeeld.

$$\text{Gegeven}\begin{cases}a=\ \ 70^\circ14'30''\\ b=100^\circ23'50''\\ c=120^\circ15'\ \ 6''\end{cases}\qquad \begin{array}{r}s-a=\ \ 75^\circ12'13''\\ s-b=\ \ 45^\circ\ \ 2'53''\\ s-c=\ \ 25^\circ11'37''\end{array}$$

$$\begin{array}{r}2s=290^\circ53'26''\\ s=145^\circ26'43''\end{array}\qquad s=145^\circ26'43''\ \text{(proef)}.$$

Eerst zullen wij berekenen log w.

$$\begin{array}{rl}
\log\sin(s-a)= & 9{,}98536-10\\
\log\sin(s-b)= & 9{,}84985-10\\
\log\sin(s-c)= & 9{,}62909-10\\
\hline
 & 9{,}46430-10\\
\log\sin s= & 9{,}75373-10\\
\hline
\log w^2= & 19{,}71057-20\\
\log w\ = & 9{,}85529-10.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log w= & 9{,}85529-10\\
\log\sin(s-a)= & 9{,}89536-10\\
\hline
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A= & 9{,}86993-10\\
\tfrac{1}{2}A= & 36^\circ32'43''\\
A= & 73^\circ\ \ 5'26''.
\end{array}\qquad
\begin{array}{rl}
\log w= & 9{,}85529-10\\
\log\sin(s-b)= & 9{,}84985-10\\
\hline
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B= & 10{,}00544-10\\
\tfrac{1}{2}B= & 45^\circ21'31''\\
B= & 90^\circ43'2''.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log w= & 9{,}85529-10\\
\log\sin(s-c)= & 9{,}62909-10\\
\hline
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C= & 10{,}22620-10\\
\tfrac{1}{2}C= & 59^\circ17'21''\\
C= & 118^\circ34'42''.
\end{array}$$

Tweede voorbeeld.

Op een bol, waarvan de straal 1 dM is, ligt een boldriehoek met zijden van 4 cM, 5 cM en 6 cM. Bereken de hoeken van dien boldriehoek.

Wij zullen eerst de zijden in graden, minuten en seconden uitdrukken. Nu is

$$a^\circ : 360^\circ = 4 : 2\pi r. \quad (r \text{ is de straal van den bol}).$$

$$a : 360 = 4 : 20\pi \qquad \text{Evenzoo is}$$

$$b : 360 = 5 : 20\pi$$

$$c : 360 = 6 : 20\pi, \qquad \text{waaruit volgt}$$

$$a = \frac{72}{\pi}, \quad b = \frac{90}{\pi}, \quad c = \frac{108}{\pi}.$$

$$\begin{array}{r} \log 72 = 1{,}85733 \\ \log \pi = 0{,}49715 \\ \hline \log a = 1{,}36018 \\ a = 22{,}9183^\circ \\ a = 22^\circ 55' 6''. \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log 90 = 1{,}95424 \\ \log \pi = 0{,}49715 \\ \hline \log b = 1{,}45709 \\ b = 28{,}648^\circ \\ b = 28^\circ 38' 53''. \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log 108 = 2{,}03342 \\ \log \pi = 0{,}49715 \\ \hline \log c = 1{,}53627 \\ c = 34{,}3769^\circ \\ c = 34^\circ 22' 37''. \end{array}$$

Verder is de oplossing als in het eerste voorbeeld.

Opmerkingen. 1. Moet men slechts hoek A berekenen, dan doet men beter de formule

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}}$$

te gebruiken.

2. Men zou de formule

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

op de volgende manier voor logarithmische berekening geschikt kunnen maken. Omdat de volstrekte waarde van $\cos b \cos c$ steeds kleiner dan 1 is, kan men $\cos b \cos c = \cos \varphi$ stellen.

Daardoor wordt

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos \varphi}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + a) \sin \frac{1}{2}(\varphi - a)}{\sin b \sin c}.$$

§ 90. Tweede geval. Gegeven: A, B, C.

Gevraagd: *a*, *b*, *c*.

Berekening.

Ter berekening van *a* kan gebruik gemaakt worden van een der volgende formules

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C};$$

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}};$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}};$$

$$\sin a = \frac{2N}{\sin B \sin C}.$$

Om dezelfde redenen als in de vorige paragraaf zullen wij hier de vierde formule, maar in eenigszins gewijzigden vorm gebruiken. Men heeft nl.

$$\cot \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{-\cos S \cos (S-A)}}$$

$$= \frac{1}{\cos (S-A)} \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}{-\cos S}}.$$

Stelt men

$$\sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}{-\cos S}} = W,$$

dan wordt

$$\cot \tfrac{1}{2}a = \frac{W}{\cos (S-A)}, \quad \cot \tfrac{1}{2}b = \frac{W}{\cos (S-B)}, \quad \cot \tfrac{1}{2}c = \frac{W}{\cos (S-C)}.$$

Discussie. Volgens § 8 moet $A + B + C$ liggen tusschen 180° en 540°. Omdat verder in den pooldriehoek de grootste zijde kleiner moet zijn dan de som der beide andere, zal men, als A den kleinsten hoek voorstelt, moeten hebben

$$180° - A < 180° - B + 180° - C,$$

of $\quad 180° + A > B + C.$

Derhalve $\quad$ *180° < som der hoeken < 540°,*

kleinste hoek + 180° > som der andere hoeken.

Omdat twee boldriehoeken gelijk en gelijkvormig zijn, als zij de drie hoeken gelijk hebben, *is er met de gegevens slechts één driehoek mogelijk.*

Opmerkingen. 1. Behoeft men slechts de zijde a te berekenen, dan gebruike men de formule

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-A)}}.$$

2. Men zou de formule

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

voor logarithmische berekening geschikt kunnen maken door de substitutie $\cos B \cos C = \cos \varphi$, waardoor zij overgaat in

$$\cos a = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A + \varphi) \cos \frac{1}{2}(A - \varphi)}{\sin B \sin C},$$

§ 91. Derde geval. Gegeven: a, b, C.

Gevraagd: A, B, c.

Berekening.

De eenvoudigste oplossing geven de analogieën van Neper.

Met de formules

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}C$$

berekent men $\frac{1}{2}(A + B)$ en $\frac{1}{2}(A - B)$, waaruit A en B volgen, en daarna c door middel van

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2}(A - B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b),$$

òf van

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b).$$

Ook kan c bepaald worden met een der formules van Delambre.

Nadat men A en B had gevonden, zou men c hebben kunnen bepalen met den sinusregel, maar men stond dan voor de keuze tusschen twee supplementaire waarden.

Moet men alleen de zijde c uit de gegevens berekenen, dan is de formule

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

verkieselijk, mits zij geschikt gemaakt wordt voor logarithmische berekening. Dit nu kan op verschillende manieren gebeuren.

Schrijf b.v. $\cos c = \cos a \cos b\,(1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cos C)$,

en stel $\operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{tg} \varphi$,

dan wordt $\cos c = \cos a \cos b\,(1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \varphi)$

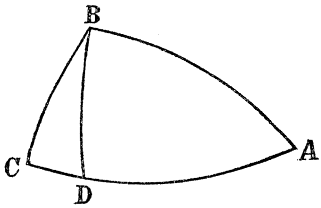
$$= \cos a \cos b \frac{\cos(b - \varphi)}{\cos b \cos \varphi},$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cos(b - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Meetkundige beteekenis van den hulphoek φ.

Omdat $\operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{tg} \varphi$, is $\cos C = \cot a \operatorname{tg} \varphi$.

Herinneren wij ons nu den regel van Neper voor de rechthoekige boldriehoeken, dan moet (fig. 48) een rechthoekige driehoek verkregen kunnen worden, waarin de elementen a en C voorkomen. Deze verkrijgt men door het trekken van de hoogtelijn BD.



Fig, 48.

In $\triangle$ BCD is nu

$$\cos C = \cot BC \operatorname{tg} CD,$$
$$\cos C = \cot a \operatorname{tg} CD.$$

De projectie CD stelt dus den boog φ voor. Bij deze methode van oplossen wordt $\triangle$ ABC dus verdeeld in twee rechthoekige boldriehoeken.

Opgave. Ga de meetkundige beteekenis van φ na, als men stelt

$$\operatorname{tg} b \cos C = \operatorname{tg} \varphi.$$

Welke formule verkrijgt men dan voor $\cos c$?

Een andere methode om $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ logarithmisch te maken is deze:

$$\cos c = \cos (a - b) - \sin a \sin b (1 - \cos C)$$
$$1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}c = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) - 2 \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2}c = \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) + \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2}C.$$

Stel nu $\quad \dfrac{\sin \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \sqrt{\sin a \sin b} = \operatorname{tg} \vartheta,$

dan is $\quad \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2}C = \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) \operatorname{tg}^2 \vartheta,$

dus $\quad \sin^2 \tfrac{1}{2}c = \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) \operatorname{tg}^2 \vartheta$

$$= \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) \sec^2 \vartheta,$$

of $\quad \sin \tfrac{1}{2}c = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \vartheta}.$

Discussie. De gegeven elementen moeten kleiner dan 180° zijn. Omdat twee boldriehoeken gelijk en gelijkvormig zijn, als zij twee zijden en den ingesloten hoek gelijk hebben, *is met de gegevens slechts één driehoek mogelijk.*

Voorbeeld.

$$\textit{Gegeven} \begin{cases} a = 112°28' \\ b = 48°40' \\ C = 76°38'20''. \end{cases}$$

$\tfrac{1}{2}(a + b) = 80°34'$, $\tfrac{1}{2}(a - b) = 31°54'$, $\tfrac{1}{2}C = 38°19'10''$.

$\log \cos \frac{1}{2}(a - b) =$	$9{,}92889 - 10$	$\log \sin \frac{1}{2}(a - b) =$	$9{,}72299 - 10$
$\log \cos \frac{1}{2}(a + b) =$	$9{,}21458 - 10$	$\log \sin \frac{1}{2}(a + b) =$	$9{,}99409 - 10$
	$10{,}71431 - 10$		$9{,}72890 - 10$
$\log \cot \frac{1}{2}C =$	$10{,}10221 - 10$	$\log \cot \frac{1}{2}C =$	$10{,}10221 - 10$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) =$	$10{,}81652 - 10$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) =$	$9{,}83111 - 10$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(A+B) &= 81^\circ 19'30'' \\
\tfrac{1}{2}(A-B) &= 34^\circ\ 7'49'' \\
A &= 115^\circ 27'19'' \\
B &= 47^\circ 11'41'' \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(A+B) &= 9{,}17849-10 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(A-B) &= 9{,}91791-10 \\
\hline
& \ 9{,}26058-10 \\
\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) &= 10{,}77951-10 \\
\hline
\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c &= 10{,}04009-10 \\
\tfrac{1}{2}c &= 47^\circ 38'26'' \\
c &= 95^\circ 16'52''
\end{aligned}$$

Had men uit de gegevens slechts c willen berekenen, dan was de berekening aldus geweest. Stel $\operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{tg}\varphi$.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} a &= 10{,}38349-10\ (n) \\
\log\cos C &= 9{,}36377-10 \\
\hline
\log \operatorname{tg}\varphi &= 9{,}74726-10\ (n) \\
\varphi &= 180^\circ - 29^\circ 11'49'' = 150^\circ 48'11'' \\
b-\varphi &= -\,102^\circ 8'11''.
\end{aligned}$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos 112^\circ 28' \cos - 102^\circ 8'11''}{\cos 150^\circ 48'11''}$$

$$= -\frac{\sin 22^\circ 28' \sin 12^\circ 8'11''}{\sin 60^\circ 48'11''}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 22^\circ 28' &= 9{,}58223-10 \\
\log\sin 12^\circ\ 8'11'' &= 9{,}32272-10 \\
\hline
& \ 8{,}90495-10 \\
\log\sin 60^\circ 48'11'' &= 9{,}94099-10 \\
\hline
\log\cos c &= 8.96396-10\,(n) \\
c &= 180^\circ - 84^\circ 43'9'' = 95^\circ 16'51''.
\end{aligned}$$

§ 92. Vierde geval. Gegeven: c, A, B.
Gevraagd: a, b, C.
Berekening.
Met behulp van de formules

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c$$

bepaalt men eerst $\frac{1}{2}(a+b)$ en $\frac{1}{2}(a-b)$, dus a en b en vervolgens C door middel van

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A+B),$$

òf van
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A-B),$$

òf van een der formules van Delambre.

Moet men alleen C berekenen, dan make men de formule
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$
geschikt voor logarithmische berekening, aldus:
$$\cos C = \cos A (-\cos B + \operatorname{tg} A \sin B \cos c).$$

Stel $\operatorname{tg} A \cos c = \cot \varphi$, dan wordt
$$\cos C = \cos A (-\cos B + \cot \varphi \sin B) = \frac{\cos A \sin (B-\varphi)}{\sin \varphi}.$$

Vraag. Wat is de meetkundige beteekenis van φ?

Een ander middel is dit:

omdat
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$
is
$$\cos C = -\cos (A+B) - \sin A \sin B (1 - \cos c),$$
$$1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C = -1 - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(A+B) - 2 \sin A \sin B \sin^2 \tfrac{1}{2} c,$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \cos^2 \tfrac{1}{2}(A+B) + \sin A \sin B \sin^2 \tfrac{1}{2} c.$$

Stel $\dfrac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \sqrt{\sin A \sin B} = \operatorname{tg} \vartheta$, dan is
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \cos^2 \tfrac{1}{2}(A+B) \sec^2 \vartheta,$$
$$\sin \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \vartheta}.$$

Discussie. De gegeven elementen moeten kleiner dan 180° zijn. Omdat twee boldriehoeken gelijk en gelijkvormig zijn, als zij een zijde en de aanliggende hoeken gelijk hebben, *is met de gegevens slechts één driehoek mogelijk.*

§ 93. Vijfde geval. Gegeven: a, b, A.
Gevraagd: c, B, C.

Berekening.

Omdat
$$\sin B : \sin A = \sin b : \sin a,$$
volgt de waarde van B uit
$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

Daarna kunnen c en C bepaald worden door middel van de Nepersche analogieën
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A-B),$$

of door de beide andere.

Discussie. Uit de waarde van sin B blijkt, dat de oplossing niet steeds mogelijk is. Omdat

$$\sin B \leqq 1$$

moet zijn, krijgt men *twee* driehoeken, *één* driehoek of *geen* driehoek, naarmate sin A sin b kleiner dan, gelijk aan of grooter dan sin a is. Men noemt daarom dit geval **twijfelachtig.**

Wij zullen de gevallen, die zich hierbij kunnen voordoen, in bijzonderheden nagaan, en daarbij gebruik maken van de eigenschappen, dat

$$A + B \lesseqgtr 180^\circ \text{ is, naarmate } a + b \lesseqgtr 180^\circ \text{ is,}$$

en dat $B \lesseqgtr A$ is, naarmate $b \lesseqgtr a$ is.

Zij

1e $a + b < 180^\circ$. dus ook $A + B < 180^\circ$.
Is $A < 90^\circ$, dan *kan* B twee waarden hebben;
Is $A = 90^\circ$, dan is $B < 90^\circ$;
Is $A > 90^\circ$, dan is $B < 90^\circ$.

2e $a + b = 180^\circ$, dus ook $A + B = 180^\circ$.
Is $A < 90^\circ$, dan $B > 90^\circ$;
Is $A = 90^\circ$, dan $B = 90^\circ$;
Is $A > 90^\circ$, dan $B < 90^\circ$.

3e $a + b > 180^\circ$, dus ook $A + B > 180^\circ$.
Is $A < 90^\circ$, dan $B > 90^\circ$;
Is $A = 90^\circ$, dan $B > 90^\circ$;
Is $A > 90^\circ$, dan *kan* B twee waarden hebben.

Er *kunnen* zich dus twee oplossingen voordoen, als

$$a + b < 180^\circ,\ A < 90^\circ,$$

en als $a + b > 180^\circ$, $A > 90^\circ$ is.

Wanneer er in deze gevallen twee oplossingen zijn, leert de volgende beschouwing.

Is $a + b < 180^\circ$, $A < 90^\circ$ en $b \leqq a$, dan is ook $B \leqq A$, zoodat men voor B den scherpen hoek en niet zijn supplement moet nemen. Is $b > a$, dan is ook $B > A$, en dan moet men voor B twee supplementaire waarden B_1 en B_2 nemen.

Is $a + b > 180^\circ$, $A > 90^\circ$ en $b \gtreqqless a$, dan is ook $B \gtreqqless A$, zoodat men voor B den stompen hoek en niet zijn supplement moet nemen. Is $b < a$, dan is ook $B < A$, en moet men voor B twee supplementaire waarden vinden. Men lette er dus op, *dat bij de volgende gevallen twee driehoeken komen:*

$$a + b < 180°,\quad a < b,\quad A < 90°.$$
$$a + b > 180°,\quad a > b,\quad A > 90°.$$

Eerste voorbeeld.

$$\text{Gegeven} \begin{cases} a = 65° \\ b = 80° \\ A = 120°. \end{cases}$$

Omdat $a + b < 180°$ is, moet $A + B < 180°$ zijn. Daardoor zou $B < 180° - 120°$ of $B < 60°$ worden, wat niet kan, omdat uit $b > a$ volgt, dat $B > A$ moet zijn. Er is dus geen driehoek met de gegevens mogelijk,

Tweede voorbeeld.

$$\text{Gegeven} \begin{cases} a = 130°. \\ b = 110° \\ A = 140°. \end{cases}$$

Er zijn twee driehoeken.

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a} = \frac{\sin 140° \sin 110°}{\sin 130°} = \frac{\sin 40° \sin 70°}{\sin 50°}.$$

$$\begin{array}{r} \log \sin 40° = 9{,}80807 - 10 \\ \log \sin 70° = 9.97299 - 10 \\ \hline 2{,}78106 - 10 \\ \log \sin 50° = 9{,}88425 - 10 \\ \hline \log \sin B = 9{,}89681 - 10. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} B_1 = 52°2'50''. & B_2 = 180° - 52°2'50'' = 127°57'10''. \\ \frac{1}{2}(A + B_1) = 96°\ 1'25'' & \frac{1}{2}(A + B_2) = 135°58'35'' \\ \frac{1}{2}(A - B_1) = 43°58'35'' & \frac{1}{2}(A - B_2) = 6°\ 1'25'' \\ \frac{1}{2}(a + b) = 120°. & \frac{1}{2}(a + b) = 120° \\ \frac{1}{2}(a - b) = 10°. & \frac{1}{2}(a - b) = 10°. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \sin \tfrac{1}{2}(A + B_1) = 9{,}99760 - 10 \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b) = 9{,}24632 - 10 \\ \hline 9{,}24392 - 10 \\ \log \sin \tfrac{1}{2}(A - B_1) = 9{,}84159 - 10 \\ \hline \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c_1 = 9{,}40233 - 10 \\ \tfrac{1}{2} c_1 = 14°10'24'' \\ c_1 = 28°20'48''. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \sin \tfrac{1}{2}(A + B_2) = 9{,}85711 - 10 \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b) = 9{,}24632 - 10 \\ \hline 9{,}10343 - 10 \\ \log \sin \tfrac{1}{2}(A - B_2) = 9{,}02093 - 10 \\ \hline \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c_2 = 10{,}08250 - 10 \\ \tfrac{1}{2} c = 50°24'35'' \\ c_2 = 100°49'10''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin\frac{1}{2}(a-b) = & 9{,}23967-10 \\ \log\cot\frac{1}{2}(A-B_1) = & 10{,}01552-10 \\ \hline & 9{,}25519-10 \\ \log\sin\frac{1}{2}(a+b) = & 9{,}93753-10 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}C_1 = & 9{,}31766-10 \\ \frac{1}{2}C_1 = & 11^\circ 44' 22'' \\ C_1 = & 23^\circ 28' 44''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sin\frac{1}{2}(a-b) = & 9{,}23967-10 \\ \log\cot\frac{1}{2}(A-B_2) = & 10{,}97666-10 \\ \hline & 10{,}21633-10 \\ \log\sin\frac{1}{2}(a+b) = & 9{,}93753-10 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}C_2 = & 10{,}27880-10 \\ \frac{1}{2}C_2 = & 62^\circ 14' 39'' \\ C_2 = & 124^\circ 29' 18''. \end{array}$$

Men verkrijgt dus de volgende driehoeken.

a	b	A	B	c	C
130°	110°	140°	52°2′50″	28°20′48″	23°28′44″
130°	110°	140°	127°57′10″	100°49′10″	124°29′18″

§ 94. Zesde geval. Gegeven: A, B, a.

Gevraagd: b, c, C.

Berekening.

De hier te gebruiken formules zijn

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b),$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cot\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Discussie. Na de bespreking van het vijfde geval kunnen wij hier kort zijn. Door middel van den pooldriehoek vindt men, *dat er twee driehoeken mogelijk zijn, als*

$$A + B > 180^\circ,\quad A > B,\quad a > 90^\circ,$$

en als $\quad A + B < 180^\circ,\quad A < B,\quad a < 90^\circ,$

§ 95. Meetkundige discussie van het vijfde geval.

Laten a, b. A de gegeven elementen zijn. In fig. 49 is $AB_1A'E'$ een groote cirkel van den bol, waarop de zijde c komt te liggen. Is ACA' een halve groote cirkel, die met den eersten een hoek $B_1AC = A$ maakt, dan vindt men het hoekpunt C door $AC = b$ daarop af te passen.

De cirkel uit C als pool met a als spherischen straal beschreven snijdt den grooten cirkel $AB_1A'E'$ in B_1 en B_2. Nu zijn AB_1C en AB_2C twee boldriehoeken, die aan de vraag voldoen.

Uit deze constructie blijkt, dat het aantal oplossingen gelijk zal zijn aan het aantal punten, waarin de halve groote cirkel AB_1A' gesneden wordt door den kleinen cirkel uit C als pool met a als spherische straal beschreven.

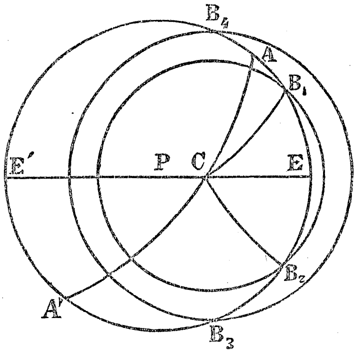


Fig. 49.

Snijpunten met den halven cirkel $AE'A'$ geven geen oplossingen; de cirkel CB_3 geeft wel twee snijpunten B_3 en B_4, maar AB_4C is geen driehoek, die aan de vraag voldoet, omdat hij niet $\angle$ A, maar zijn supplement bevat.

Is P een pool van den grooten cirkel $AB_1A'E'$ en $ECPE'$ de groote cirkel door die pool en den top C, dan zijn CE en CE′ de spherische afstanden van C tot de zijde AB; CE is de kleinste, en CE′ de grootste van alle groote cirkels, die men uit C naar een punt van $AB_1A'E'$ kan trekken.

Is daarom de gegeven zijde a kleiner dan de kleinste of grooter dan de grootste afstand, dan is er geen driehoek met de gegevens mogelijk.

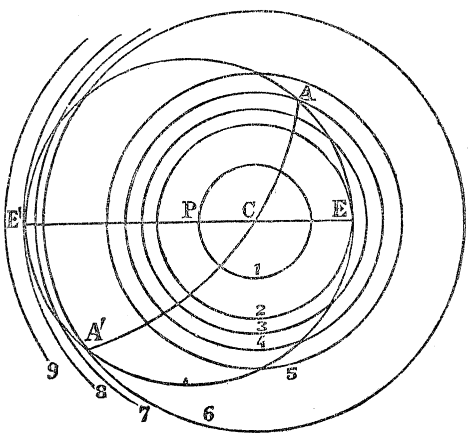


Fig. 50.

Na deze inleidende beschouwing is het niet moeilijk, de verschillende mogelijkheden te bepalen. In fig. 50 is weer $AEA'E'$ de groote cirkel, waarlangs de zijde c moet liggen; $\angle CAE =$ de gegeven hoek A, terwijl $AC = b$. Uit C als pool zijn nu verschillende cirkels 1, 2, 3, ... 9 beschreven. In onderstaand overzicht is steeds tusschen haakjes geplaatst het nummer van den cirkel, die betrekking op het geval heeft. Zij nu

I. $b < 90°$, en

I^e^ $A < 90$.

$a < CE$, *geen* driehoek (1).

$a = CE$, *een* rechthoekige driehoek (2).

$CE < a < b$, *twee* driehoeken (3).

$a = b$,	*een* driehoek (4).
$b < a < 180° - b$,	*een* driehoek (5).
$a \geqq 180° - b$,	*geen* driehoek (6, 7, 8, 9).
2^e^ $A = 90°$.	
$a \leqq b$,	*geen* driehoek.
$b < a < 180° - b$,	*twee* driehoeken, (deze zijn $\cong$).
$a \geqq 180° - b$,	*geen* driehoek.
3^e^ $A > 90°$.	Neemt men aan, dat in fig. 50 thans $\angle$ CAE′ de gegeven hoek A is, dan moet men voor bruikbare oplossingen letten op snijpunten met den halven cirkel AE′A′. Men heeft dan:
$a > CE'$,	*geen* driehoek (9).
$a = CE'$,	*een* rechthoekige driehoek (8).
$180° - b < a < CE'$,	*twee* driehoeken (7).
$b < a \leqq 180° - b$.	*een* driehoek (6, 5).
$a \leqq b$,	*geen* driehoek (4, 3, 2, 1).
II. $b = 90°$.	Nu is C het midden van boog ACA′, E en E′ zijn de middens van AEA′ en AE′A′. Is $A < 90°$, dan is $CE = A$, en voor $A > 90°$ nemen wij $CE' = A$.
Zij	
1^e^ $A < 90°$.	
$a < A$,	*geen* driehoek (1).
$a = A$,	*een* rechthoekige driehoek (2).
$A < a < 90°$,	*twee* driehoeken (3).
$a \geqq 90°$,	*geen* driehoek (4, ... 9).
2^e^ $A = 90°$.	
$a < 90°$,	*geen* driehoek.
$a = 90°$,	*oneindig* aantal driehoeken.
$a > 90°$,	*geen* driehoek.
3^e^ $A > 90°$.	
$a > A$,	*geen* driehoek (9).
$a = A$,	*een* rechthoekige driehoek (8).
$90° < a < A$,	*twee* driehoeken (7).
$a \leqq 90°$,	*geen* driehoek (6, 4).
III. $b > 90°$.	Zij nu $CA' = b$, terwijl, als A scherp is, $\angle CA'E = A$, en als A stomp is, $\angle CA'E' = A$.

1^e^	$A < 90°$.	
	$a < CE$,	*geen* driehoek.
	$a = CE$,	*een* rechthoekige driehoek.
	$CE < a < 180° - b$,	*twee* driehoeken.
	$180° - b \leqq a < b$,	*een* driehoek.
	$a \geqq b$,	*geen* driehoek.
2^e^	$A = 90°$.	
	$a \leqq 180° - b$,	*geen* driehoek.
	$180° - b < a < b$,	*twee* driehoeken, (deze zijn $\cong$).
	$a \geqq b$,	*geen* driehoek.
3^e^	$A > 90°$.	
	$a > CE'$,	*geen* driehoek.
	$a = CE'$,	*een* rechthoekige driehoek.
	$b < a < CE'$,	*twee* driehoeken.
	$180° - b < a \leqq b$,	*een* driehoek.
	$a \leqq 180° - b$,	*geen* driehoek.

§ 96. Voorbeelden van oplossingen, als van een boldriehoek drie elementen niet rechtstreeks gegeven zijn.

Eerste voorbeeld. Gegeven: b, c, $B + C$.

Oplossing.

Met behulp van de Nepersche formule

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} \cot \tfrac{1}{2}(B + C)$$

vindt men A;

$$\text{uit } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b - c)}{\sin \frac{1}{2}(b + c)} \cot \tfrac{1}{2}A$$

volgt daarna B — C, waardoor B en C bekend worden, en ten slotte a uit

$$\cot \tfrac{1}{2}a = \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos \frac{1}{2}(B + C)} \cot \tfrac{1}{2}(b + c).$$

Ter bepaling van B — C kan men ook den tangensregel gebruiken.

Dezelfde methode kan aangewend worden, als gegeven zijn:

$$\begin{cases} b,\ c,\ B - C \\ b + c,\ B,\ C. \\ b - c,\ B,\ C. \\ B + C,\ b + c,\ A. \\ B + C,\ b + c,\ a. \\ B + C,\ b - c,\ A. \end{cases} \qquad \begin{cases} B + C,\ b - c,\ a. \\ B - C,\ b + c,\ A. \\ B - C,\ b + c,\ a. \\ B - C,\ b - c,\ A. \\ B - C,\ b - c,\ a. \end{cases}$$

Tweede voorbeeld. Gegeven: $a + b$, c. B.

Oplossing.

Men heeft

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}} \times \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin(s-b)}}$$

$$= \frac{\sin(s-c)}{\sin c},$$

dus $$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(s-c)}{\sin s\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B}.$$

Daar nu $a + b + c = 2s$ bekend is, dus ook $s - c$, kan A gevonden worden. Vervolgens kan $a - b$ bepaald worden met een der formules van Neper, enz.

Derde voorbeeld. Gegeven: $a + b + c = 2s$, A, B.

Oplossing.

Uit het tweede voorbeeld leiden wij af:

$$\sin(s-c) = \sin s\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B,$$

waardoor c kan gevonden worden. Van den driehoek zijn nu bekend een zijde en de aanliggende hoeken.

Vierde voorbeeld. Gegeven: s, A + B, C.

Oplossing.

Uit een der formules van Delambre leidt men af:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos(90^\circ - \frac{1}{2}C)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B) - \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B) + \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b) - \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b) + \cos\frac{1}{2}c}.$$

of $$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(S - C + 90^\circ)\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}(S - 90^\circ) = \text{tg}\,\tfrac{1}{2}s\ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}(s-c),$$

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(s-c) = \frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}(S - C + 90^\circ)\ \text{tg}\,\frac{1}{2}(S - 90^\circ)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}s}.$$

Wanneer hieruit $s - c$ gevonden is, kunnen, c en $a + b$ bepaald worden, enz.

§ 97. Vraagstukken.

Bereken de onbekende elementen; als gegeven zijn

1. 1^e^ $a = 60^\circ$, $b = 72^\circ$, $c = 80^\circ$.
   2^e^ $a = 36^\circ$, $b = 144^\circ$, $c = 119^\circ 6' 28''$.
   3^e^ $\text{tg}\,a = \frac{3}{4}$, $\text{tg}\,b = \frac{5}{12}$, $\text{tg}\,c = \frac{8}{15}$.
2. 1^e^ $A = 105^\circ$, $B = 120^\circ$, $C = 135^\circ$.
   2^e^ $A = 55^\circ 42' 7''$, $B = 45^\circ 44' 6''$, $C = 135^\circ 15' 57''$.

3. 1e $a = 68°20'25''$, $b = 52°18'15''$, $C = 117°12'20''$.
2e $a = 50°10'30''$, $b = 40°0'10''$, $C = 121°36'20''$.
4. 1e $a = 77°10'6''$, $B = 86°14'22''$, $C = 71°27'18''$.
2e $a = 124°17'42''$, $B = 120°47'44''$, $C = 57°35'29''$.
5. 1e $a = 56°19'40''$, $b = 20°16'38''$, $B = 20°9'55''$.
2e $a = 134°15'54''$, $b = 150°57'5''$, $B = 144°22'42''$.
6. $a = 45°$, $A = 60°$, $B = 45°$.

7. Van een boldriehoek is $A = 60°$, $b = 60°$, $c = 145°$. Bereken de bogen, waarin de zijde a wordt verdeeld door den boog van den grooten cirkel, waarvan A een pool is.
8. Van een boltweehoek AB is $\angle A = \angle B = 62°20'40''$. Op de eene zijde wordt een punt P, en op de andere een punt Q genomen zóo, dat $AP = PQ = QB$. Bereken AP.
9. Van een boldriehoek ABC is $A = 53°21'10''$, $B = 84°10'4''$, $C = 58°13'10''$. Bereken de bogen der groote cirkels, die de middens der zijden van dezen driehoek verbinden.
(Ex. Adsp. Landm. 1903).
10. Als $c = 70°13'$, $A = 80°50'40''$, $B = 50°4'12''$, bereken dan de stukken, waarin de zijde c door het voetpunt der hoogtelijn op die zijde verdeeld wordt.
11. Op een bol, waarvan de straal 18 cM is, ligt een boldriehoek, waarvan de zijden 18 cM, 20 cM en 24 cM zijn. Bereken de hoeken van dien driehoek.
12. Als $c = 90°$, $a = 2b$, $C = 120°$, bereken dan de onbekende elementen. (Toel. Univ. 1908).
13. Als $a = 79°51'46''$, $c = 61°15'40''$ en $A + C = B$, bereken dan de onbekende elementen. (Toel. Univ. 1908).
14. Als $a = 40°20'20''$, $b = 30°30'30''$ en $A = 3B$, bereken dan de hoeken. (Toel. Univ. 1905).
15. Als a een zijde en A een hoek van een gelijkzijdigen boldriehoek is, bereken dan a en A, als
1e $a + A = 120°$, 2e $a + A = 90°$, 3e $a = A$ is.
16. Van een gelijkbeenigen boldriehoek is de tophoek gelijk aan de som der basishoeken, terwijl de hoogtelijn op de basis gelijk is aan boog tg $\sqrt{2}$. Bereken de hoeken.
17. Bereken de hoeken van een gelijkzijdigen boldriehoek, als de zijde gelijk is aan den straal van den bol.

Bereken de onbekende elementen van een boldriehoek, als

18. $a = 25°13'$, $b = 37°14'$, $A + B = 45°36'$.
19. $a = 50°30'$, $b = 30°30'$, $A - B = 10°20'$. (Toel. Univ. 1905).
20. $a - b = 42°51'45''$, $c = 140°53'16''$, $C = 138°16'21''$. (Toel. Univ. 1907).
21. $a + b = 124°54'30''$, $c = 116°47'$, $A = 32°57'40''$.
22. $a + b = 180°$, $a = 77°56'44''$, $A = 60°$.
23. $a = 110°$, $b = 80°$, $A - B = 70°6'4''$.
24. $c = 60°$, $A - B = 30°$, $a + b = 180°$.
25. $a = b$, $C = 60°$, $A + B + c = 180°$. (Toel. Univ. 1909).
26. $A + a = 198°11'56''$, $B = 42°15'13''$, $b = 50°20'30''$. (Toel. Univ. 1909).
27. $a + b = 180°$, $A = 121°20'$, $c = 50°$.
28. $a = 40°$, $A = 30°$, $C - c = 80°$.
29. $A - B = 66°32'44''$, $a - b = 35°18'45''$, $c - C = 9°6'50''$.
30. $A + a = 90°$, $B = 80°51'10''$, $b = 40°30'10''$.
31. $a + b + c = 205°17'15''$, $A = 57°50'$, $B = 98°20'$.
32. $a = 65°21'22''$, $b = 70°9'9''$, $A + B = 142°50'$.

33. Geef formules ter berekening van de onbekende elementen, als gegeven zijn S, a, b.
34. Evenzoo, als gegeven zijn c, A, $B + C$.
Toepassen op $c = 60°4'54''$, $A = 129°5'28''$, $B + C = 247°20'52''$.
35. Evenzoo, als gegeven zijn c, $a + b$, A.
Toepassen op $c = 40°0'10''$, $a + b = 126°46'6''$, $A = 121°36'20''$.
36. Bepaal de zijde van een gelijkzijdigen boldriehoek, als voor dien driehoek $n = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.
37. Bepaal den hoek van een gelijkzijdigen boldriehoek, als voor dien driehoek $N = \frac{1}{32}\sqrt{11}$.
38. Als a de zijde van een gelijkzijdigen boldriehoek is, en
$$\sin 2a = 2 \operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}°,$$
dan is $A + a = 90°$. Bewijs dat. ($2a$ wordt kleiner dan 90° ondersteld).
39. Maak voor logarithmische berekening geschikt de formule

1e $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$, door middel van de substitutie
$\cos b \cos c = \sin a \operatorname{tg} \varphi$.

2e $\cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$, door middel van de substitutie
$\cos B \cos C = \sin A \cot \varphi$.

40. Als a, b en C gegeven zijn, kan men A en B ook vinden uit den cotangentenregel:

$$\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C,$$

en $$\cot b \sin a - \cot B \sin C = \cos a \cos C.$$

Maak deze formules geschikt voor logarithmische berekening door middel van de substituties

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} a \cos C, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} b \cos C.$$

Wat is de meetkundige beteekenis van φ_1 en φ_2?

41. Als c, A en B gegeven zijn, kan men a en b ook vinden uit

$$\cot a \sin c - \cot A \sin B = \cos c \cos B,$$

$$\cot b \sin c - \cot B \sin A = \cos c \cos A.$$

Maak deze formules geschikt voor logarithmische berekening. Wat is de meetkundige beteekenis der hulphoeken?

42. Van een boldriehoek zijn gegeven a, b en B. Wil men slechts C berekenen, dan kan men gebruik maken van de formule $\cot b \sin a - \cot B \sin C = \cos a \cos C$, die logarithmisch kan gemaakt worden door de substitutie $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\cot B}{\cos a}$, waardoor men verkrijgt: $\cos (C - \varphi) : \cos \varphi = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} b$. Bewijs dit.
Wat is de meetkundige beteekenis van φ?

IV. MERKWAARDIGE LIJNEN IN DEN BOLDRIEHOEK.

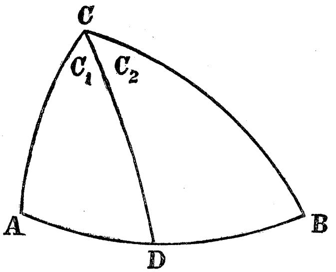
TRANSVERSALEN.

§ 98. Eigenschap. Als D een punt is op de zijde AB van boldriehoek ABC, dan is

$$\cos AC \sin BD + \cos BC \sin AD = \cos CD \sin AB.$$

(Theorema van Stewart voor den bol.)

Bewijs.



Eig. 51.

De boog CD (fig. 51) verdeelt driehoek ABC in twee driehoeken, waarvan de hoeken bij D elkaars supplement zijn.

Nu is volgens den eersten cosinusregel:

$$\cos AC = \cos AD \cos CD + \\ + \sin AD \sin CD \cos ADC.$$

$$\cos BC = \cos BD \cos CD - \\ - \sin BD \sin CD \cos ADC.$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijkingen respectievelijk met sin BD en sin AD en telt op, dan komt er

$$\begin{aligned}\cos AC \sin BD + \cos BC \sin AD &= \cos CD (\cos AD \sin BD + \cos BD \sin AD) \\ &= \cos CD \sin (AD + BD) \\ &= \cos CD \sin AB.\end{aligned}$$

Opmerking. Deze stelling vertoont overeenkomst met het bekende theorema van Stewart uit de vlakke meetkunde. Wanneer er geen verwarring kan ontstaan, zullen wij deze stelling kortweg noemen: Theorema van Stewart.

§ 99. Andere vorm van het theorema van Stewart.

Noem C_1 en C_2 de beide deelen, waarin hoek C door boog CD verdeeld wordt (fig. 51), en wel $\angle$ ACD $= C_1$, $\angle$ BCD $= C_2$. Men heeft dan de

Eigenschap.

$$\cot CD = \cot a \frac{\sin C_1}{\sin C} + \cot b \frac{\sin C_2}{\sin C}.$$

Bewijs.

Volgens § 79 heeft men:

$$\cot D \sin C_1 = \cot b \sin CD - \cos C_1 \cos CD$$
$$-\cot D \sin C_2 = \cot a \sin CD - \cos C_2 \cos CD.$$

Vermenigvuldig de 1ste verg. met $\sin C_2$, de 2de met $\sin C_1$, dan volgt terstond:

$$\cos CD (\sin C_1 \cos C_2 + \cos C_1 \sin C_2) = \sin CD (\cot a \sin C_1 + \cot b \sin C_2)$$
$$\cos CD \sin C = \sin CD (\cot a \sin C_1 + \cot b \sin C_2)$$
$$\cot CD = \frac{\cot a \sin C_1}{\sin C} + \frac{\cot b \sin C_2}{\sin C}.$$

§ **100. Eigenschap.** (Zie fig. 51).

$$\mathbf{\cos A \sin C_2 - \cos B \sin C_1 = \cos BDC \sin C.}$$

(Deze eigenschap stelt ons in staat, den hoek te berekenen, dien een boog door een hoekpunt met de overstaande zijde maakt.)

Bewijs.

Volgens den tweeden cosinusregel is in de boldriehoeken ACD en BCD:

$$\cos A = \cos BDC \cos C_1 + \sin BDC \sin C_1 \cos CD,$$
$$\cos B = -\cos BDC \cos C_2 + \sin BDC \sin C_2 \cos CD.$$

Vermenigvuldig deze vergelijkingen respectievelijk met $\sin C_2$ en $\sin C_1$ en trek af. Er komt:

$$\cos A \sin C_2 - \cos B \sin C_1 = \cos BDC (\cos C_1 \sin C_2 + \cos C_2 \sin C_1)$$
$$= \cos BDC \sin C.$$

§ **101. Eigenschap. Als M een punt is binnen boldriehoek ABC, P een willekeurig punt op het boloppervlak, terwijl $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$ en $2n$ de sinussen der boldriehoeken MBC, MCA, MAB en ABC zijn (§ 86), dan is**

$$\mathbf{n_1 \cos PA + n_2 \cos PB + n_3 \cos PC = n \cos PM.}$$

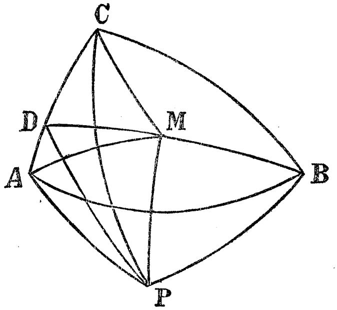


Fig. 52.

Bewijs.

Laat het verlengde van BM in D de zijde AC snijden (fig. 52). Past men het theorema van Stewart toe op de boldriehoeken PAC en PBD, dan komt er

$$\cos PA \sin CD + \cos PC \sin AD =$$
$$= \cos PD \sin AC,$$
$$\cos PB \sin MD + \cos PD \sin MB =$$
$$= \cos PM \sin BD.$$

Stelt men de waarden van cos PD uit deze vergelijkingen aan elkaar gelijk, dan verkrijgt men na een eenvoudige herleiding:

$$\sin CD \sin MB \cos PA + \sin AC \sin MD \cos PB$$
$$+ \sin AD \sin MB \cos PC = \sin AC \sin BD \cos PM.$$

Stelt men $\sin ADM = \sin CDM = \sin D$, dan is

$$\begin{aligned}
\sin CD \sin MB \sin D &= \sin MC \sin MB \sin CMB = 2n_1,\\
\sin AC \sin MD \sin D &= \sin AC \sin AM \sin MAC = 2n_2,\\
\sin AD \sin MB \sin D &= \sin AM \sin BM \sin AMB = 2n_3,\\
\sin AC \sin BD \sin D &= \sin AC \sin AB \sin A \quad = 2n,
\end{aligned}$$

waardoor bovenstaande vergelijking overgaat in

$$n_1 \cos PA + n_2 \cos PB + n_3 \cos PC = n \cos PM.$$

Opmerking. Laat men P met M samenvallen, dan heeft men, als M binnen den driehoek ligt, de eigenschap

$$\boldsymbol{n_1 \cos MA + n_2 \cos MB + n_3 \cos MC = n.}$$

Formules voor en eigenschappen van de merkwaardige lijnen.

§ **103. Mediaan.** De medianen uit A, B en C zullen voorgesteld worden door m_a, m_b en m_c.

Is in fig. 51 CD een mediaan, dan is volgens het theorema van Stewart

$$\cos a \sin \tfrac{1}{2}c + \cos b \sin \tfrac{1}{2}c = \cos m_c \sin c = 2 \cos m_c \sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c,$$

waaruit volgt

$$\boldsymbol{\cos m_c = \frac{\cos a + \cos b}{2 \cos \frac{1}{2}c}},$$

of in logarithmischen vorm:

$$\cos m_c = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}c}.$$

Deze formule geeft de mediaan in functie der zijden. Door middel van de formules van Delambre kan men de verkregen formule herleiden tot

$$\cos m_c = \frac{\sin (A + B)}{\sin C} \sqrt{\frac{\cos (S - A) \cos (S - B)}{\sin A \sin B}}.$$

waardoor m_c in functie van de hoeken is uitgedrukt.

Toepassing.

Zijn in fig. 53 D en E de middens van BC en AC, dan kan de lengte van den boog ED volgenderwijs gevonden worden.

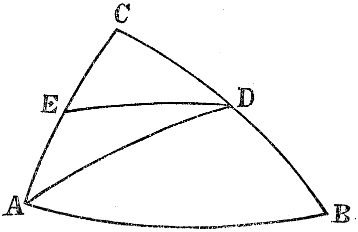


Fig. 53.

In $\triangle$ ACD is DE een mediaan. Daarom is

$$\cos \mathrm{ED} = \frac{\cos \frac{1}{2} a + \cos \mathrm{AD}}{2 \cos \frac{1}{2} b}.$$

Nu is AD mediaan in $\triangle$ ABC, dus

$$\cos \mathrm{AD} = \frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{1}{2} a}.$$

Substitueert men deze waarde in de eerste formule, dan komt er na eenige herleidingen

$$\cos \mathrm{ED} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}.$$

§ **103. Bissectrix.** Omdat de bissectrix van een buitenhoek buiten den driehoek ligt, heeft elke hoek twee buitenbissectrices, die elkaars supplement zijn.

De binnenbissectrices der hoeken A, B en C zullen worden voorgesteld door b_a, b_b, b_c, de buitenbissectrices door b'_a, b'_b, b'_c.

Is in fig. 51 CD een binnenbissectrix, dan is volgens § 99

$$\cot b_c = \cot a \frac{\sin \frac{1}{2} \mathrm{C}}{\sin \mathrm{C}} + \cot b \frac{\sin \frac{1}{2} \mathrm{C}}{\sin \mathrm{C}}$$

$$= \frac{\cot a + \cot b}{2 \cos \frac{1}{2} \mathrm{C}} = \frac{\sin (a + b)}{2 \sin a \sin b \cos \frac{1}{2} \mathrm{C}}.$$

$$\cot b_c = \frac{\sin (a + b)}{2 n} \sin \tfrac{1}{2} \mathrm{C}.$$

Deze formule geeft b_c in functie van de omliggende zijden en den ingesloten hoek. Drukt men $\sin \frac{1}{2}$C in de zijden uit, dan komt de formule

$$\mathbf{tg}\, b_c = \frac{2}{\sin (a + b)} \sqrt{\sin a \sin b \sin s \sin (s - c)}.$$

$\left(\text{In de vlakke meetkunde heeft men } b_c = \frac{2}{a + b} \sqrt{abs\,(s - c)}\right).$

Door middel van de formules van Delambre kan men de gevonden formules ook herleiden tot

$$\operatorname{tg} b_c = \frac{2 \mathrm{N}}{\cos \frac{1}{2} \mathrm{C} (\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B})},$$

waardoor de bissectrix in de hoeken is uitgedrukt.

Om een formule voor b'_c te vinden, bedenke men, dat b'_c binnenbissectrix is van den nevendriehoek A'BC (of van AB'C), waarvan de zijden zijn: a, $180° - b$, $180° - c$.

Substitueert men deze waarden in de formule voor $\operatorname{tg} b_c$ uitgedrukt in de zijden, dan verkrijgt men

$$\operatorname{tg} b'_c = \pm \frac{2}{\sin(180^\circ + a - b)} \sqrt{\sin a \sin(180^\circ - b) \sin(s-a) \sin(s-b)}$$
$$= \pm \frac{2}{\sin(a-b)} \sqrt{\sin a \sin b \sin(s-a) \sin(s-b)}.$$

Vraag. Waarom heeft het tweede lid een dubbel teeken?

§ **104. Eigenschappen. Een binnenbissectrix verdeelt de overstaande zijde in deelen, waarvan de sinussen evenredig zijn met de sinussen der aangrenzende zijden.** Dezelfde stelling geldt ook voor de **buitenbissectrix,** mits men onder de deelen, waarin de overstaande zijde verdeeld wordt, de afstanden verstaat van het voetpunt der bissectrix tot de uiteinden der overstaande zijde.

Bewijs.

Zij CD de bissectrix van hoek C. Volgens den sinusregel is in de driehoeken ACD en BCD.

$$\sin AD : \sin AC = \sin \tfrac{1}{2} C : \sin D,$$
$$\sin BD : \sin BC = \sin \tfrac{1}{2} C : \sin D, \text{ waaruit volgt}$$
$$\sin AD : \sin AC = \sin BD : \sin BC, \text{ of}$$
$$\sin AD : \sin BD = \sin AC : \sin BC.$$

Voor de buitenbissectrix wordt het bewijs op gelijksoortige wijze geleverd.

§ **105. Hoogtelijn.** In § 17 en § 21 werd reeds opgemerkt, dat men uit elk hoekpunt van een boldriehoek twee hoogtelijnen kan trekken. Omtrent deze twee hoogtelijnen heeft men de

Eigenschap. Zijn de hoeken A en B gelijksoortig, d.w.z. òf beide scherp, òf beide stomp, dan valt de eene hoogtelijn uit C binnen, de andere buiten den driehoek. Zijn de hoeken A en B ongelijksoortig, dan vallen beide hoogtelijnen uit C buiten den driehoek.

Deze stelling is een gevolg van opmerking 2 van § 47, dat nl. een rechthoekszijde van een rechthoekigen boldriehoek gelijksoortig is met de overstaande scheeve hoek.

Stelt men de hoogtelijnen uit A, B en C voor door h_a, h_b, h_c, dan heeft men

$$\sin h = \frac{2}{\sin a} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$
$$= \frac{2n}{\sin a}.$$

Bewijs.

Zij AD een hoogtelijn uit A. In den rechthoekigen driehoek ABD heeft men

$$\sin \mathrm{AD} = \sin c \sin \mathrm{B}.$$

$$\text{of} \quad \sin a \sin h_a = \sin a \sin c \sin \mathrm{B} = 2n,$$

$$\text{dus} \quad \sin h_a = \frac{2n}{\sin a}.$$

In functie der hoeken luidt de formule

$$\sin h_a = \frac{2}{\sin \mathrm{A}} \sqrt{-\cos \mathrm{S} \cos (\mathrm{S}-\mathrm{A}) \cos (\mathrm{S}-\mathrm{B}) \cos (\mathrm{S}-\mathrm{C})}$$

$$= \frac{2\mathrm{N}}{\sin \mathrm{A}}.$$

§ **106. Bepaling**. *De boldriehoek, waarvan de voetpunten der hoogtelijnen van boldriehoek ABC de hoekpunten zijn, heet* **voetpuntendriehoek** *van driehoek ABC.*

Eigenschap. De hoogtelijnen van een boldriehoek zijn bissectrices van zijn voetpuntendriehoek.

Bewijs.

In $\triangle$ ABC (fig. 54) zijn AD, BE en CF hoogtelijnen, DEF is de voetpuntendriehoek. Stel

$$\angle \mathrm{CFD} = \alpha,$$

$$\text{dan is } \angle \mathrm{BFD} = 90^\circ - \alpha.$$

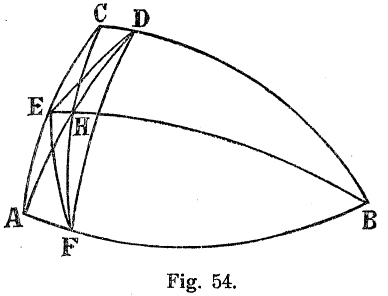


Fig. 54.

In de driehoeken CFD en BFD is

$$\sin \alpha : \sin \mathrm{CD} = \sin \mathrm{FCB} : \sin \mathrm{FD},$$

$$\cos \alpha : \sin \mathrm{BD} = \sin \mathrm{B} \quad : \sin \mathrm{FD},$$

waaruit volgt:

$$\operatorname{tg} \alpha : \frac{\sin \mathrm{CD}}{\sin \mathrm{BD}} = \frac{\sin \mathrm{FCB}}{\sin \mathrm{B}} : 1.$$

CD, BD en $\angle$ FCB zijn elementen der rechthoekige driehoeken ACD, ABD en BFC.

Drukt men die elementen in andere uit, dan gaat de laatste evenredigheid over in

$$\operatorname{tg} \alpha : \frac{\cot \mathrm{C} \operatorname{tg} h_a}{\cot \mathrm{B} \operatorname{tg} h_a} = \frac{\cos \mathrm{B}}{\cos h_c \sin \mathrm{B}} : 1,$$

waaruit na eenige herleidingen volgt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cot \mathrm{C}}{\cos h_c}.$$

Op gelijksoortige manier vindt men, als $\angle$ EFC $= \beta$,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cot C}{\cos h_c}.$$

De hoogtelijn CF is dus een bissectrix van den voetpuntendriehoek.

§ **107. Bepaling.** *Als CD een mediaan van boldriehoek ABC is, en men trekt den boog CF* (fig. 55) *zóó, dat $\angle ACF = \angle BCD$, dan heet CF de* **symmediaan** *van driehoek ABC uit C.*

De binnenbissectrix CE is ook binnenbissectrix van den hoek, gevormd door mediaan en symmediaan.

Eigenschap. Een symmediaan van een boldriehoek verdeelt de overstaande zijde in deelen, waarvan de sinussen evenredig zijn met de vierkanten van de sinussen der aangrenzende zijden.

Bewijs.

Noem $\angle$ ACF $= \angle$ BCD $= \alpha$, en $\angle$ FCE $= \angle$ DCE $= \beta$.

In de driehoeken ACD en BCD is nu

$$\sin(\alpha + 2\beta) : \sin D = \sin \tfrac{1}{2}c : \sin b,$$
$$\sin a : \sin D = \sin \tfrac{1}{2}c : \sin a.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin b} \quad . \ . \ (1)$$

In de driehoeken ACF en BCF is

$$\frac{\sin \alpha}{\sin AF} = \frac{\sin F}{\sin b} \quad . \ . \ . \ (2)$$

$$\frac{\sin BF}{\sin(\alpha + 2\beta)} = \frac{\sin a}{\sin F} \quad . \ . \ . \ (3)$$

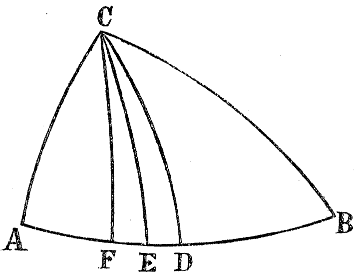


Fig. 55.

Vermenigvuldigt men de overeenkomstige leden van (1), (2) en (3), dan verkrijgt men

$$\mathbf{\sin BF : \sin AF = \sin^2 \mathit{a} : \sin^2 \mathit{b}}.$$

TRANSVERSALEN.

§ **198. Eigenschap. Als een groote cirkel de zijden BC, CA en AB van een boldriehoek ABC, of hun verlengden, in a, b en c snijdt, dan is**

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = +1.$$

(Theorema van Menelaüs voor den bol).

Bewijs.

Zij in fig. 56 de boog *abc* een transversaal. Trek AD, BE en CF loodrecht op deze transversaal, dan volgt uit de rechthoekige boldriehoeken A*c*D en B*c*E:

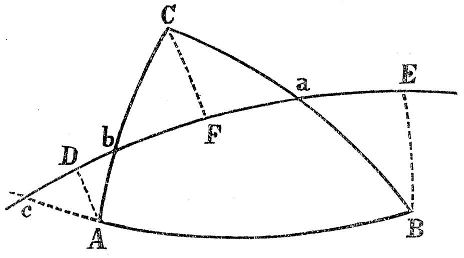


Fig. 56.

$$\sin c = \frac{\sin \mathrm{AD}}{\sin \mathrm{A}c},$$

$$\sin c = \frac{\sin \mathrm{BE}}{\sin \mathrm{B}c},$$

bijgevolg $\dfrac{\sin \mathrm{A}c}{\sin \mathrm{B}c} = \dfrac{\sin \mathrm{AD}}{\sin \mathrm{BE}}$.

Evenzoo blijkt dat $\dfrac{\sin \mathrm{B}a}{\sin \mathrm{C}a} = \dfrac{\sin \mathrm{BE}}{\sin \mathrm{CF}}$.

en dat $\dfrac{\sin \mathrm{C}b}{\sin \mathrm{A}b} = \dfrac{\sin \mathrm{CF}}{\sin \mathrm{AD}}$.

Omdat A*c* en B*c* in dezelfde richting loopen, noemt men de breuk $\dfrac{\sin \mathrm{A}c}{\sin \mathrm{B}c}$ positief. Maar dan zijn de andere breuken negatief. Het product der breuken is dus weer positief, zoodat

$$\frac{\sin \mathrm{A}c}{\sin \mathrm{B}c} \times \frac{\sin \mathrm{B}a}{\sin \mathrm{C}a} \times \frac{\sin \mathrm{C}b}{\sin \mathrm{A}b} = +1.$$

Opmerking. Zonder hulplijnen kan men het bewijs als volgt geven:

$$\frac{\sin \mathrm{A}c}{\sin \mathrm{A}b} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\frac{\sin \mathrm{C}b}{\sin \mathrm{C}a} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

$$\frac{\sin \mathrm{B}a}{\sin \mathrm{B}c} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

Door vermenigvuldiging:

$$\frac{\sin \mathrm{A}c}{\sin \mathrm{A}b} \times \frac{\sin \mathrm{C}b}{\sin \mathrm{C}a} \times \frac{\sin \mathrm{B}a}{\sin \mathrm{B}c} = 1.$$

Met *a*, *b* en *c* worden bedoeld de hoeken bij de punten *a*, *b* en *c*.

Zooals men terstond zal inzien, gaat de eigenschap ook nog door als men één of meer der tegenpunten van *a*, *b* en *c* kiest.

De transversaal kan ook de verlengden der drie zijden van den driehoek snijden.

Trekt men A*a*, B*b* en C*c*, dan verkrijgt men de betrekking:

$$\frac{\sin a\,\mathrm{AB}}{\sin a\,\mathrm{AC}} \times \frac{\sin b\,\mathrm{BC}}{\sin b\,\mathrm{BA}} \times \frac{\sin c\,\mathrm{CA}}{\sin c\,\mathrm{CB}} = 1.$$

en omgekeerd, als aan deze gelijkheid voldaan is, liggen de 3 punten a, b en c op een grooten cirkel.

Omgekeerd: **Als drie punten a, b en c op de zijden BC, CA en AB of hun verlengden liggen, en**

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = +1,$$

dan liggen a, b en c op een grooten cirkel.

Bewijs.

Stel dat de groote cirkel door a en b de zijde AB of haar verlengde in d snijdt, dan is

$$\frac{\sin Ad}{\sin Bd} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = +1.$$

waaruit in verband met de gegevens volgt:

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} = \frac{\sin Ad}{\sin Bd},$$

$$\frac{\sin Bc + \sin Ac}{\sin Bc - \sin Ac} = \frac{\sin Bd + \sin Ad}{\sin Bd - \sin Ad}.$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (Bc + Ac)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (Bc - Ac)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (Bd + Ad)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (Bd - Ad)},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (Bc + Ac) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (Bd + Ad),$$

of

$$Bc + Ac = Bd + Ad.$$

Derhalve valt d met c samen, en gaat de groote cirkel door a en b ook door c.

Opmerking. Deze stelling stelt ons vaak in staat te bewijzen, dat drie punten op een grooten cirkel liggen.

§ **109. Eigenschap. Als P een punt op den bol is, en de bogen AP, BP en CP snijden de zijden BC, CA en AB, of hun verlengden, in a, b en c, dan is**

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = -1.$$

(Theorema van de Céva voor den bol.)

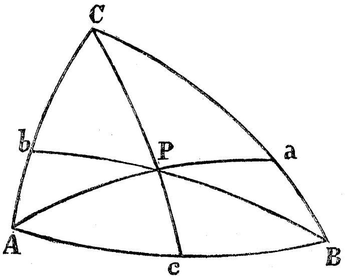


Fig. 57.

Bewijs.

In de driehoeken APc en BPc is

$$\frac{\sin Ac}{\sin AP} = \frac{\sin APc}{\sin AcP},$$

$$\frac{\sin Bc}{\sin BP} = \frac{\sin BPc}{\sin BcP},$$

waaruit volgt:

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} = \frac{\sin AP \times \sin APc}{\sin BP \times \sin BPc}.$$

Evenzoo is $$\frac{\sin Ba}{\sin Ca} = \frac{\sin BP \times \sin BPa}{\sin CP \times \sin CPa},$$

en $$\frac{\sin Cb}{\sin Ab} = \frac{\sin CP \times \sin CPb}{\sin AP \times \sin APb}.$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijkingen, en bedenkt men, dat de breuken in de eerste leden negatief zijn, dan komt er

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = -1.$$

Omgekeerd: **Als drie punten a, b, c op de zijden BC, CA en AB, of op hun verlengden liggen, en**

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = -1,$$

dan gaan de cirkels Aa, Bb, Cc door één punt.

Het bewijs kan op dezelfde manier gegeven worden als in § 108.

Opmerkingen. 1. De laatste eigenschap geeft ons een middel, om te onderzoeken of drie groote cirkels door één punt gaan.

2. Men kan de eerste eigenschap van deze paragraaf ook bewijzen door toepassing van de stelling van Menelaüs op de driehoeken ACc en BCc, waarvan Bb en Aa transversalen zijn.

3. Als men de deelen, waarin de hoeken A, B en C door de cirkels verdeeld worden, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 noemt, en wel

$$\angle PAB = A_1, \quad \angle PBC = B_1, \quad \angle PCA = C_1,$$

dan is ook $$\frac{\sin A_1}{\sin A_2} \times \frac{\sin B_1}{\sin B_2} \times \frac{\sin C_1}{\sin C_2} = -1.$$

4. De 2 eigenschappen van de Ceva kan men afleiden uit de twee van Menelaüs met behulp der poolfiguur.

§ 110. Eigenschap. Als drie cirkels Aa, Bb, Cc, uit de hoekpunten van een boldriehoek ABC getrokken, door één punt P gaan, en de overstaande zijden in a, b en c snijden, dan zullen de overeenkomstige zijden der driehoeken ABC en abc elkaar snijden in punten, die op een grooten cirkel liggen.

Bewijs.

Omdat Aa, Bb en Cc door één punt gaan, is volgens § 109

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = -1.$$

Omdat b, a en F op een grooten cirkel liggen, is volgens § 108

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} \times \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \times \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = 1.$$

Uit deze vergelijkingen volgt:

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} = -\frac{\sin Ac}{\sin Bc}.$$

Evenzoo is $\frac{\sin BD}{\sin CD} = -\frac{\sin Ba}{\sin Ca}$

en $\frac{\sin CE}{\sin AE} = -\frac{\sin Cb}{\sin Ab}.$

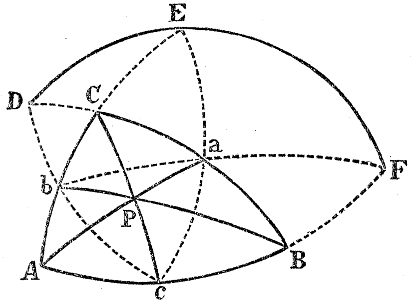


Fig. 58.

Omdat het product van de tweede leden in deze vergelijkingen $+1$ is, is ook

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} \times \frac{\sin BD}{\sin CD} \times \frac{\sin CE}{\sin AE} = +1.$$

Derhalve liggen volgens de tweede eigenschap van § 108 de punten D, E en F op een grooten cirkel.

§ 111. Eigenschap. Als van twee boldriehoeken ABC en A′B′C′ de bogen AA′, BB′ en CC′ door een punt O gaan, dan snijden de paren zijden BC en B′C′, CA en C′A′, AB en A′B′ elkaar in punten op een grooten cirkel.

(Theorema van Desargues voor den bol).

Bewijs.

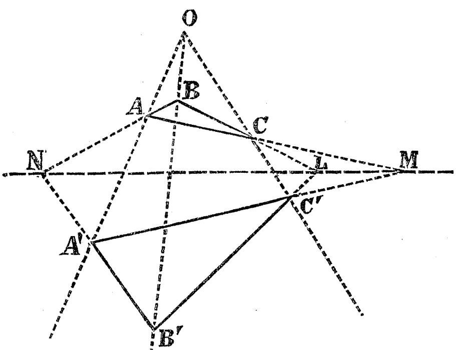


Fig. 59.

Als in fig. 59 de paren overeenkomstige zijden elkaar snijden in L, M en N, en men beschouwt LB′C′, MC′A′, NA′B′ resp. als transversalen der boldriehoeken OBC, OCA en OAB, dan heeft men

$$\frac{\sin B'O}{\sin B'B} \times \frac{\sin LB}{\sin LC} \times \frac{\sin C'C}{\sin C'O} = 1,$$

$$\frac{\sin C'O}{\sin C'C} \times \frac{\sin MC}{\sin MA} \times \frac{\sin A'A}{\sin A'O} = 1,$$

$$\frac{\sin A'O}{\sin A'A} \times \frac{\sin NA}{\sin NB} \times \frac{\sin B'B}{\sin B'O} = 1.$$

Door vermenigvuldiging volgt hieruit:

$$\frac{\sin LB}{\sin LC} \times \frac{\sin MC}{\sin MA} \times \frac{\sin NA}{\sin NB} = 1.$$

De punten L, M en N liggen dus op een grooten cirkel.

Opmerkingen. 1. Ook het omgekeerde van deze stelling is waar: **Als van twee boldriehoeken ABC en A′B′C′ de paren zijden BC en B′C′, CA en C′A′, AB en A′B′ elkaar in punten snijden, die op een grooten cirkel liggen, dan gaan de bogen AA′, BB′ en CC′ door één punt.**

2. De eigenschap in § 110 is een bijzonder geval van bovenstaande eigenschap.

§ **112.** Als toepassing van het omgekeerde van de zoo juist bewezen stelling volgt hier de

Eigenschap. De groote cirkels, die de middens der overstaande zijden en der diagonalen van een bolvierhoek verbinden, gaan door één punt.

Bewijs.

In fig. 60 zijn E, F, G, H, K en L de middens der zijden en der diagonalen van bolvierhoek ABCD. De groote cirkels HG en EF snijden de diagonaal AC in een punt P_3, dat spherisch $90°$ van K verwijderd is. LF snijdt boog CD in P_2 zoo, dat P_2 het midden der zijde CD′ is van boldriehoek ACD′ (D′ is het tegenpunt van D). Evenzoo is het snijpunt P_1 van LE en AD het midden der zijde AD′ van driehoek ACD′.

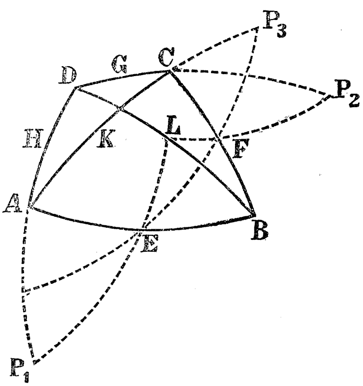


Fig. 60.

Volgens § 26 liggen deze punten op een grooten cirkel. De boldriehoeken HGK en FEL zijn dus zoodanig gelegen, dat de paren zijden HG en FE, HK en FL, GK en EL elkaar snijden in punten, die op een grooten cirkel liggen. Derhalve gaan HF, GE en KL door één punt.

§ **113. Toepassingen.**

A. *De medianen van een boldriehoek gaan door één punt.*

Zijn in fig. 57 *a*, *b* en *c* de middens der zijden, dan is elk der breuken $\frac{\sin Ac}{\sin Bc}$, $\frac{\sin Ba}{\sin Ca}$, $\frac{\sin Cb}{\sin Ab}$ gelijk aan -1, dus ook hun product. De medianen gaan dus door één punt.

B. *De groote cirkel, die door de middens D en E der zijden BC en AC van een boldriehoek ABC gaat, snijdt het verlengde van de zijde AB in een punt F (of in het tegenpunt F'), dat spherisch 90° van het midden van AB is verwijderd.*

Omdat DEF een transversaal is, is

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} \times \frac{\sin BD}{\sin CD} \times \frac{\sin CE}{\sin AE} = 1$$

of

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} = 1.$$

Omdat deze breuk positief is, ligt F op het verlengde van AB en niet op AB zelf. Dus is

$$AF + BF = 180°.$$

of als G het midden is van AB:

$$GF + \tfrac{1}{2}c + GF - \tfrac{1}{2}c = 180°,$$

dus

$$GF = 90°.$$

C. *De drie binnenbissectrices van een boldriehoek gaan door één punt.*

De drie verhoudingen van § 109 zijn hier

$$-\frac{\sin b}{\sin a}, \quad -\frac{\sin c}{\sin b}, \quad -\frac{\sin a}{\sin c};$$

hun product is dus -1.

D. *Een binnenbissectrix en de buitenbissectrices der andere hoeken gaan door één punt.*

Bewijs als onder C.

E. *De buitenbissectrices van een boldriehoek snijden de overstaande zijden in punten, die op een grooten cirkel liggen.*

F. *De hoogtelijnen van een boldriehoek gaan door één punt.*

Zijn in fig. 57 A*a*, B*b* en C*c* de hoogtelijnen, dan is

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} = -\frac{\cot A \operatorname{tg} h_c}{\cot B \operatorname{tg} h_c} = -\frac{\cot A}{\cot B}.$$

Het product der drie verhoudingen is dus weer gelijk aan -1.

G. *De symmedianen van een boldriehoek gaan door één punt.* **(Symmediaanpunt).**

Voor het bewijs make men gebruik van de eigenschap van § 107.

H. *Bepaalt men op elke zijde van een boldriehoek de punten, die spherisch 90° van het midden van die zijde liggen, dan liggen de zes aldus verkregen punten op een grooten cirkel.*

Deze eigenschap is een gevolg van die van § 110.

K. *De cirkels, door de hoekpunten van een boldriehoek getrokken,* *die den omtrek van den driehoek middendoor deelen, gaan door één punt.* (*Isoperimetrisch punt*).

Het bewijs wordt aan den lezer overgelaten.

In de volgende hoofdstukken zullen nog andere toepassingen volgen.

ISOGONALE CIRKELS.

§ **114. Bepaling.** *Als men door een der hoekpunten van een boltweehoek twee groote cirkels trekt, die met de bissectrix van dien tweehoek gelijke hoeken maken, dan noemt men die cirkels* **isogonaal verwant** *met betrekking tot de beenen van den tweehoek.*

De bissectrix van een tweehoek is dus isogonaal verwant met zich zelf.

Eigenschap. Als men uit twee punten P en Q van twee isogonaal verwante cirkels loodlijnen neerlaat op de beenen van den hoek, dan is het product van de sinussen der loodlijnen op het eene been gelijk aan het product van de sinussen der loodlijnen op het andere been.

Bewijs.

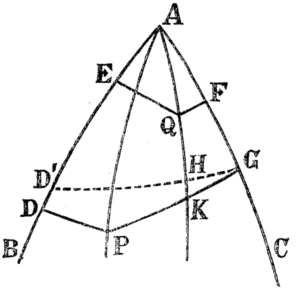


Fig. 61.

Als PD, PG, QE, QF de loodlijnen zijn, dan moet bewezen worden, dat

$$\sin PD \sin QE = \sin PG \sin QF.$$

Men heeft:

$$\sin PD = \sin PA \sin PAD,$$
$$\sin QE = \sin QA \sin QAE,$$

waaruit door vermenigvuldiging volgt:

$$\begin{aligned}\sin PD \sin QE &= \sin PA \sin PAD \sin QA \sin QAE \\ &= (\sin PA \sin PAG) \times (\sin QA \sin QAG) \\ &= \sin PG \sin QF.\end{aligned}$$

Als omgekeerd *twee punten P en Q zoo gelegen zijn, dat het product van de sinussen van de loodlijnen, uit die punten op het eene been neergelaten, gelijk is aan het product van de sinussen der loodlijnen op het andere been, dan zijn de cirkels, die P en Q met het hoekpunt van den hoek verbinden, isogonaal verwant ten opzichte van de beenen van dien hoek.*

§ **115. Eigenschap. Als men uit een punt van één van twee isogonaal verwante cirkels loodlijnen neerlaat op de**

beenen van den hoek, dan staat de cirkel, die de voetpunten verbindt, loodrecht op den anderen isogonalen cirkel.

Bewijs.

Bewezen moet worden, dat in fig. 61 DG loodrecht op AK staat. Stel dat de loodlijn GH uit G op AK neergelaten, het been AB in D′ snijdt.

Men heeft nu

$$\cos \mathrm{DAP} = \cos \mathrm{KAG} = \operatorname{tg} \mathrm{AD} \cot \mathrm{AP} = \operatorname{tg} \mathrm{AG} \cot \mathrm{AK}$$
$$\cos \mathrm{PAG} = \cos \mathrm{D'AH} = \operatorname{tg} \mathrm{AH} \cot \mathrm{AD'} = \operatorname{tg} \mathrm{AG} \cot \mathrm{AP}.$$
$$\operatorname{tg}^2 \mathrm{AG} = \operatorname{tg} \mathrm{AH} \operatorname{tg} \mathrm{AK}.$$

Vermenigvuldigt men de laatste drie vergelijkingen, daarbij gelijke factoren in beide leden weglatende, dan komt er

$$\operatorname{tg} \mathrm{AD} \cot \mathrm{AD'} = 1$$
$$\operatorname{tg} \mathrm{AD} = \operatorname{tg} \mathrm{AD'},$$

waaruit volgt dat D′ met D samenvalt.

§ **116. Eigenschap. Als men een punt P op het boloppervlak met de hoekpunten van een boldriehoek ABC door groote cirkels verbindt, zullen de isogonaal verwante cirkels door één punt Q gaan.**

Bewijs.

Als de isogonaal verwanten van AP en BP elkaar in Q snijden, dan moet bewezen worden, dat CQ isogonaal verwant is met CP.

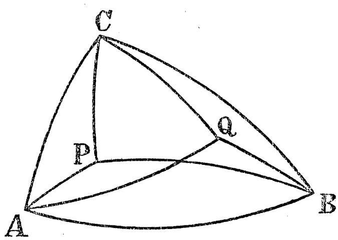


Fig. 62.

Noem de loodlijnen uit P op de zijden a, b en c neergelaten, resp. x_1, x_2, x_3, die uit Q op dezelfde zijden y_1, y_2, y_3, dan is volgens de eigenschap van § 114:

$$\sin x_2 \sin y_2 = \sin x_3 \sin y_3,$$
$$\sin x_1 \sin y_1 = \sin x_3 \sin y_3, \text{ waaruit volgt:}$$
$$\sin x_1 \sin y_1 = \sin x_2 \sin y_2.$$

Volgens het omgekeerde van de eigenschap van § 114 zijn dus CP en CQ isogonaal verwant ten opzichte van de beenen van hoek C.

Bepaling. *Twee punten P en Q, die de in deze paragraaf aangeduide ligging hebben, heeten* **isogonaal verwante** *of* **reciproke punten** *ten opzichte van boldriehoek ABC.*

Gevolg: De pool van den ingeschreven cirkel is isogonaal verwant met zich zelf.

In § 113 is reeds bewezen, dat de symmedianen door één punt gaan. Het symmediaanpunt is dus isogonaal verwant met het snijpunt der medianen.

Uit het bovenstaande volgt nog:

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \frac{1}{\sin y_1} : \frac{1}{\sin y_2} \cdot \frac{1}{\sin y_3},$$

of in woorden:

De sinussen van de loodlijnen, uit een punt op de zijden van een boldriehoek neergelaten, zijn omgekeerd evenredig met de sinussen der loodlijnen, uit het isogonaal verwante punt op dezelfde zijden neergelaten.

Men kan de plaats van een punt P op het bolоppervlak bepalen door zijn spherische afstanden x_1, x_2 en x_3 tot de zijden BC, CA en AB van een boldriehoek ABC. *Men noemt de* **sinussen** *dezer spherische afstanden de* **normale coördinaten** *van het punt P ten opzichte van driehoek ABC.* Uit het bovenstaande volgt dan, dat *de normale coördinaten van twee isogonaal verwante punten omgekeerd evenredig zijn.*

Evenals de trilineaire coördinaten van een punt in het platte vlak, zijn de normale coördinaten van een punt op het bolvlak afhankelijk van elkaar. Is nl. $2n$ de sinus van $\triangle$ ABC, dan heeft men

$$\sin^2 a \sin^2 x_1 + \sin^2 b \sin^2 x_2 + \sin^2 c \sin^2 x_3$$
$$+ 2 \sin b \sin c \cos a \sin x_2 \sin x_3 + 2 \sin c \sin a \cos b \sin x_3 \sin x_1$$
$$+ 2 \sin a \sin b \cos c \sin x_1 \sin x_2 = 4n^2.$$

Daar wij in het vervolg geen gebruik van deze betrekking maken, laten wij het bewijs er van aan den lezer over.

§ 117. **Eigenschap. De normale coördinaten van het mediaanpunt Z van een boldriehoek zijn omgekeerd evenredig met de sinussen der zijden,** of

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \frac{1}{\sin a} : \frac{1}{\sin b} : \frac{1}{\sin c}.$$

Bewijs.

Noem $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$, de sinussen der boldriehoeken BZC, CZA en AZB (fig. 63), dan zullen wij eerst aantoonen, dat

$$n_1 = n_2 = n_3.$$

Uit de formule

$$\sin h_a = \frac{2n}{\sin a}$$

volgt onmiddellijk, dat de sinussen van twee boldriehoeken op dezelfde basis zich verhouden als de sinussen der hoogtelijnen op die basis.

De driehoeken AZC en BZC hebben de gemeenschappelijke basis ZC, terwijl de hoogten uit A en B op ZC gelijk zijn. De sinussen van die driehoeken zijn dus gelijk, derhalve

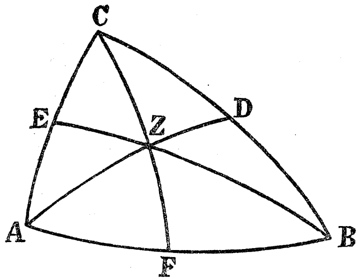


Fig. 63.

$$n_1 = n_2 = n_3.$$

Nu is $\sin x_1 = \dfrac{2n_1}{\sin a}$, $\sin x_2 = \dfrac{2n_2}{\sin b}$, $\sin x_2 = \dfrac{2n_3}{\sin c}$,

zoodat $\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \dfrac{1}{\sin a} : \dfrac{1}{\sin b} : \dfrac{1}{\sin c}$.

Opmerking. Omdat het symmediaanpunt isogonaal verwant is met het mediaanpunt, heeft men volgens § 116 de

Eigenschap. De normale coördinaten van het symmediaanpunt van een boldriehoek zijn evenredig met de sinussen der zijden.

§ **118. Bepaling.** *Als men op de zijde AB van een boldriehoek ABC twee punten D en E neemt zoodanig, dat AD = BE, en D en E evenver van het midden van AB liggen, dan heeten de cirkels CD en CE* **isotomisch verwant** *ten opzichte van de zijde AB van den driehoek.*

Eigenschap. Als men een punt P op het bolоppervlak met de hoekpunten van een boldriehoek ABC door groote cirkels verbindt, zullen de isotomisch verwante cirkels door één punt Q gaan.

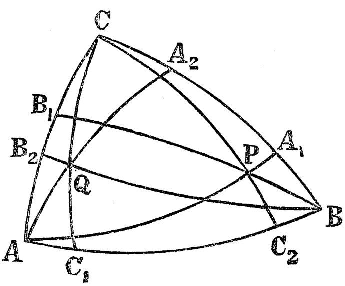


Fig. 64.

Bewijs.

Laat in fig. 64 $BA_1 = CA_2$, $CB_1 = AB_2$ zijn, dan zullen wij bewijzen, dat $AC_1 = BC_2$ is

Volgens § 109 is

$$\frac{\sin AB_1}{\sin CB_1} \times \frac{\sin CA_1}{\sin BA_1} \times \frac{\sin BC_2}{\sin AC_2} = -1,$$

$$\text{en} \quad \frac{\sin CB_2}{\sin AB_2} \times \frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} \times \frac{\sin BA_2}{\sin CA_2} = -1,$$

waaruit door deeling volgt:

$$\frac{\sin AC_1}{\sin BC_1} = \frac{\sin BC_2}{\sin AC_2},$$

$$\frac{\sin AC_1 + \sin BC_1}{\sin AC_1 - \sin BC_1} = \frac{\sin BC_2 + \sin AC_2}{\sin BC_2 - \sin AC_2}.$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(AC_1 - BC_1)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(BC_2 - AC_2)},$$

dus $\quad \frac{1}{2}(AC_1 - BC_1) = \frac{1}{2}(BC_2 - AC_2).$

Ook is $\quad \dfrac{\frac{1}{2}(AC_1 + BC_1) = \frac{1}{2}(BC_2 + AC_2)}{AC_1 = BC_2}$ op

Bepaling. *Twee punten P en Q, die de in deze paragraaf aangeduide ligging hebben, heeten* **isotomisch verwante punten** *ten opzichte van boldriehoek ABC.*

Gevolg. Het snijpunt der medianen van een boldriehoek is isotomisch verwant met zich zelf.

Aan den lezer wordt overgelaten het bewijs van de

Eigenschap. Als P en Q twee isotomisch verwante punten zijn ten opzichte van boldriehoek ABC, en waarvan $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\sin x_3$ en $\sin y_1$, $\sin y_2$, $\sin y_3$ de normale coördinaten zijn, dan is

$$\sin y_1 : \sin y_2 : \sin y_3 = \frac{1}{\sin^2 a \sin x_1} : \frac{1}{\sin^2 b \sin x_2} : \frac{1}{\sin^2 c \sin x_3}.$$

§ 119. Vraagstukken.

1. Bereken
   1e m_c, als $A = 75°$, $B = 90°$, $C = 105°$.
   2e a, als $b = 80°24'$, $c = 64°15'$, $m_a = 72°14'$.
   3e c, als $a = 30°$, $b = 120°$, $m_b = 45°$.
   4e a en b, als gegeven zijn $a - b$, c, m_c.

2. Bereken
   1e b_a, als $A = 130°$, $B = 110°$, $C = 80°$.
   2e b_c, als $a = 58°32'$, $b = 73°12'$, $C = 90°$. (Toel. Univ. 1912).
   3e C, als $a = 70°$, $b = 50°$, $b_c = 56°$.

3. Gegeven: $a = 60°$, $b = 80°$, $c = 70°$. Hoe groot zijn de stukken, waarin de bissectrix van $\angle$ B de zijde b verdeelt.
   (Toel. Univ. 1909).

4. Bereken

1^e h_a, als $a = 60^\circ 30'$, $b = 75^\circ 40'$, $c = 80^\circ 50'$.

2^e h_c, als $A = 45^\circ$, $B = 30^\circ$, $c = 150^\circ$.

3^e h_c, als $a = 45^\circ$, $b = 30^\circ$, $C = 30^\circ$.

4^e h_c, als $a + b = 180^\circ$, $b = c$, $A - B = 90^\circ$.

(Toel. Univ. 1906).

5^e h_c, als $a = 134^\circ 15' 54''$, $A = 59^\circ 12' 15''$, $b - B = 6^\circ 34' 23''$.

(Toel. Univ. 1909).

6^e c en A, als $a = 35^\circ 15' 53''$, $b = 90^\circ$, $h_a = 30^\circ$.

5. Als de zijde van een gelijkzijdigen boldriehoek

1^e 45° is, dan is $\sin h_a = \sqrt{\operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}^\circ}$.

2^e 60° is, dan is $\sin h_a = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$.

6. Geef formules ter berekening van de onbekende elementen, als gegeven zijn

1^e $a + b$, C, h_c; 2^e $a - b$, C, h_c;

3^e c, C, h_c; 4^e a, b, h_c.

7. In den gelijkbeenigen boldriehoek ABC wordt uit den top A de boog AD zoo getrokken, dat $BD : CD = 1 : 2$.
Als $BC = 70^\circ 34' 27''$ en $AD = 59^\circ 47' 19''$, vraagt men de onbekende elementen van $\triangle$ ABC te berekenen.

8. Als $a + b < 180^\circ$ is, dan is $m_c < 90^\circ$.
Als $a + b = 180^\circ$ is, dan is $m_c = 90^\circ$.
Als $a + b > 180^\circ$ is, dan is $m_c > 90^\circ$. Bewijs dit.

(Visschers, Mathesis 1909).

9. Als $C = 90^\circ$, dan is

$$\cos m_c = \frac{\cos a + \cos b}{\sqrt{2(1 + \cos a \cos b)}}.$$

10. De mediaan AD van boldriehoek ABC verdeelt hoek A in twee deelen $BAD = x$, en $CAD = y$. Bewijs, dat

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b - c)}.$$

11. Als a en b de zijden van een bolparallelogram zijn, waarvan c en d de diagonalen zijn, dan is

$$(\cos a + \cos b)^2 = (1 + \cos c)(1 + \cos d). \qquad (\S\ 102).$$

12. Als $\cot^2 \tfrac{1}{2} m_c = \cot \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{1}{2} b$, dan is

$$1 + \cos(a - b) = 2 \cos \tfrac{1}{2} c.$$

13. Als CD een mediaan in boldriehoek ABC is, dan is

$$\cot ADC = \frac{\sin(B - A)}{2 \sin A \sin B \cos \frac{1}{2} c}. \qquad (\S\ 100).$$

Is in dien driehoek bovendien $C = A + B$, dan is

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} ADC = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

14. Als $C = A + B$, dan is $\cos a + \cos b = 1 + \cos c$.

15. Als $a + b + c = 180^\circ$, dan is $\cos m_a = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}(b - c)$.

16. Als in een boldriehoek $A + B + C = 360^\circ$, (zie ook § 43, n⁰ 22), dan is

1^e^ $1 + \cos a + \cos b + \cos c = 0$;

2^e^ $\cos \tfrac{1}{2}a \cos m_a + \cos \tfrac{1}{2}b \cos m_b + \cos \tfrac{1}{2}c \cos m_c = -1$;

3^e^ $\cos (m_a - \tfrac{1}{2}a) + \cos (m_b - \tfrac{1}{2}b) + \cos (m_c - \tfrac{1}{2}c) = 1$;

4^e^ $\sin \tfrac{1}{2}a \sin m_a + \sin \tfrac{1}{2}b \sin m_b + \sin \tfrac{1}{2}c \sin m_c = 2$;

5^e^ $\sin (m_a + m_b + m_c) = \sin s$;

6^e^ $\dfrac{\sin m_a}{\sin \tfrac{1}{2}a} = \dfrac{\sin m_b}{\sin \tfrac{1}{2}b} = \dfrac{\sin m_c}{\sin \tfrac{1}{2}c}$.

17. Als Z het snijpunt der medianen van boldriehoek ABC is, dan is

$$\sin ZA : \sin ZB : \sin ZC =$$
$$= \sin m_a \cos \tfrac{1}{2}a : \sin m_b \cos \tfrac{1}{2}b : \sin m_c \cos \tfrac{1}{2}c.$$

18. Als $a + b < 180^\circ$ is, dan is $b_c < 90^\circ$.
Als $a + b = 180^\circ$ is, dan is $b_c = 90^\circ$.
Als $a + b < 180^\circ$ is, dan is $b_c > 90^\circ$. Bewijs dit

(Visschers Mathesis 1914.)

19. Als $A = 120^\circ$, dan is $\cot b_a = \dfrac{\sin (b + c)}{\sin b \sin c}$.

20. In den boldriehoek ABC verdeelt de bissectrix AD de zijde BC in twee stukken x en y. Bewijs, dat

$$\frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x - y)} = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b + c)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b - c)}.$$

21. AD is een bissectrix van boldriehoek ABC. Door D trekt men een grooten cirkel loodrecht op AD, die AB in E en AC in F snijdt. Bewijs, dat

$$2 \cot AF = 2 \cot AE = \cot b + \cot c. \qquad (§ 103).$$

22. Van een gelijkbeenigen boldriehoek zijn de beenen AB en AC elk 90°. Door een vast punt R van de bissectrix AS brengt men een willekeurigen grooten cirkel, die AB in P, en AC in Q snijdt. Bewijs, dat $\operatorname{tg} PB + \operatorname{tg} QC$ constant is.

23. Bewijs dat

$$\cos \tfrac{1}{2}A \cot b_a + \cos \tfrac{1}{2}B \cot b_b + \cos \tfrac{1}{2}C \cot b_c = \cot a + \cot b + \cot c.$$

24. Als de omtrek van een boldriehoek 180° is, dan is

$$\operatorname{tg} b_a : \operatorname{tg} b_b : \operatorname{tg} b_c = \frac{\sqrt{\cot a}}{\sin a} : \frac{\sqrt{\cot b}}{\sin b} : \frac{\sqrt{\cot c}}{\sin c}.$$

25. Van boldriehoek ABC is $a + b + c = 180°$. Uit A en B laat men op de buitenbissectrix van $\angle$ C de loodlijnen AF en BG neer. Bewijs dat

$$\sin \mathrm{FC} : \sin \mathrm{GC} = \sqrt{\cot a} : \sqrt{\cot b}.$$

26. CD is een bissectrix van boldriehoek ABC, Bewijs dat

$$\cot \mathrm{AD} - \cot c = \frac{\sin a}{\sin b \sin c}.$$

27. Bewijs ook, dat

$$\cos \mathrm{ADC} = -\cos \mathrm{BDC} = \frac{\cos \mathrm{A} - \cos \mathrm{B}}{2 \cos \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\sin (b-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}}.$$

28. De buitenbissectrix van $\angle$ C snijdt het verlengde van AB in E. Bewijs dat

$$\cos \mathrm{AEC} = \frac{\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B}}{2 \sin \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\sin (a+b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}}.$$

29. Als $\mathrm{C} = 90°$, dan is

$$\cot^2 b_c + \cot^2 b'_c = \cot^2 a + \cot^2 b.$$

30. CP en CQ zijn binnen- en buitenbissectrix van den rechten hoek van een rechthoekigen boldriehoek ABC. Bewijs, dat

$$\frac{\sin \mathrm{CP} \sin \mathrm{CQ}}{\sin \mathrm{PQ}} = \frac{\sin a \sin b}{\sin c},$$

$$\cot \mathrm{PQ} = \frac{\sin (a+b) \sin (a-b)}{2 \sin a \sin b \sin c}.$$

31. Als γ de hoek is tusschen de mediaan en de bissectrix uit C, dan is

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{C}. \qquad (\S\ 107).$$

32. Als CD een binnenbissectrix is, dan is

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\mathrm{AD}}{\sin a} - \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\mathrm{BD}}{\sin b} = \frac{4 \sin \frac{1}{2}(b-a) \cos \frac{1}{2}(b+a) \sin^2 \frac{1}{2}c}{\sin a \sin b \sin c}. \qquad (\S\ 104).$$

33. AP en AQ zijn binnen- en buitenbissectrix van een boldriehoek ABC. Bewijs dat

$$\frac{2}{\operatorname{tg} \mathrm{PQ}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \mathrm{BQ}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \mathrm{CQ}}.$$

34. Bewijs, dat

$$1^e \ \cos^2 h_a = \frac{\cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a}.$$

2e $\operatorname{tg}^2 h_c = \dfrac{\sin^2 c}{\cot^2 A + \cot^2 B + 2 \cot A \cot B \cos c}$.

3e $\operatorname{tg}^2 h_c = \dfrac{\sin^2 C}{\cot^2 a + \cot^2 b - 2 \cot a \cot b \cos C}$.

35. In een rechthoekigen boldriehoek ($\angle C = 90°$) is
1e $\sin h_a = \sqrt{-\cos (A + B) \cos (A - B)}$.
2e $\sin h_c = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin c} \sqrt{\sin (c + a) \sin (c - a)}$.

36. Als C de rechte zijde van een rechtzijdigen boldriehoek is, dan is
1e $\cos^2 h_c = \cos^2 a + \cos^2 b$.
2e $\cot^2 h_c = \cot^2 A + \cot^2 B$.
3e $\sin h_c = \sqrt{-\cos (a + b) \cos (a - b)}$.
4e $\sin^2 h_c \operatorname{tg} P \operatorname{tg} Q = 1$, als P en Q de deelen zijn, waarin de hoogtelijn hoek C verdeelt. (Toel. Univ. 1909).

37. Als $C = A + B$, dan is
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} h_c = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c_2}.$$
Hierin zijn c_1 en c_2 de deelen, waarin c door de hoogtelijn daarop verdeeld wordt.

38. Als $A + B + C = 360°$, dan is
$$\cot \tfrac{1}{2} h_a = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a_2}.$$
Hierin zijn a_1 en a_2 de deelen, waarin a door de hoogtelijn daarop verdeeld wordt.

39. De hoogtelijn AD verdeelt $\angle A$ in twee deelen x en y. Bewijs, dat
$$\frac{\cot \frac{1}{2} (x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (x + y)} = \frac{\sin (b + c)}{\sin (b - c)}.$$

40. De hoogtelijn AD verdeelt de basis BC in deelen $CD = a_1$, en $BD = a_2$. Bewijs, dat
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (a_1 - a_2) = \frac{\sin (B - C)}{\sin (B + C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b + c) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b - c) \cot \tfrac{1}{2} a.$$

41. Van een boldriehoek ABC zijn AD, BE en CF de hoogtelijnen, die elkaar in H snijden. Bewijs, dat
1e $\cos AH : \cos BH : \cos CH = \sec a : \sec b : \sec c$.
2e $\sin DH : \sin EH : \sin FH = \sec A : \sec B : \sec C$.
3e $\cos DH : \cos EH : \cos FH = \cos a \cos h_a : \cos b \cos h_b : \cos c \cos h_c$.
4e $\operatorname{tg} HA \operatorname{tg} HD = \operatorname{tg} HB \operatorname{tg} HE = \operatorname{tg} HC \operatorname{tg} HF$.
5e $\operatorname{tg} AD \cot HD = 1 + \cos A \sec B \sec C$.
6e $\sin AF \sin BD \sin CE = \sin FB \sin DC \sin EA$.
7e $\cos AF \cos BD \cos CE = \cos FB \cos DC \cos EA$.
8e $\operatorname{tg} AF \operatorname{tg} BD \operatorname{tg} CE = \operatorname{tg} FB \operatorname{tg} DC \operatorname{tg} EA$.

42. In boldriehoek ABC is CP een mediaan en CQ een hoogtelijn. Bewijs, dat

$$\frac{\operatorname{tg} PQ}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c} = \frac{\sin (A - B)}{\sin (A + B)}.$$

43. In een rechthoekigen boldriehoek ($C = 90°$) is

$$\frac{1 - \cos 2m_c}{2 - \cos 2h_c + \cos 2m_c} = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}c.$$

44. De hoogtelijn uit C verdeelt de basis in de stukken c_1 en c_2, de bissectrix uit C verdeelt de basis in de stukken s_1 en s_2. Bewijs, dat $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (c_1 - c_2) \times \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s_1 - s_2) = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} (a - b)$.

45. Als φ de hoek is tusschen hoogtelijn en bissectrix uit het hoekpunt A, dan is

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (B + C) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (B - C) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A$$
$$= \frac{\sin (b - c)}{\sin (b + c)} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin (s - b) \sin (s - c)}}.$$

Is $A = 90°$, dan is

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos A - \cos B}{\cos A + \cos B}.$$

46. Van een gelijkbeenigen boldriehoek ABC is $CA = CB = a$. Men verbindt den top met een punt D op de basis door een boog d. Als $AD = p$, $BD = q$ is, bewijs dan, dat

$$\cos d = \frac{\cos a \cos \frac{1}{2} (p - q)}{\cos \frac{1}{2} (p + q)} \text{ is.}$$

47. Van een gelijkbeenigen boldriehoek ABC ($b = c$) is elke basishoek het dubbele van den tophoek. Bewijs, dat

$$\frac{\cos b}{\cos a} = 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b.$$

48. Is d de binnenbissectrix van hoek BAC van boldriehoek ABC en d_1 de buitenbissectrix, toon dan aan:

$$4 \sin^2 b \sin^2 c = \operatorname{tg}^2 d \sin^2 (b + c) + \operatorname{tg}^2 d_1 \sin^2 (b - c)$$

(Visschers Mathesis 1910.)

49. Als s_a de symmediaan uit A is, bewijs dan

1e $$\operatorname{tg} s_a = \frac{\sin b \sin c \sqrt{(\sin^2 b + \sin^2 c + 2 \sin a \sin b \cos C)}}{(\cos b + \cos c)(1 - \cos b \cos c)}.$$

2e $$\frac{\operatorname{tg} m_a}{\operatorname{tg} s_a} = \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c - \cot b \cot c.$$ (§ 99).

50. Van een gelijkbeenigen boldriehoek ABC is $AC = BC = 90°$. Een boog van een grooten cirkel snijdt AC in D en BC in E.

P is een punt op DE. AP snijdt BC in Q, PB snijdt AC in R. Bewijs, dat

$$\frac{\text{tg CR}}{\text{tg CD}}+\frac{\text{tg CQ}}{\text{tg CE}}=1 \text{ is.}$$

51. De binnen- en de buitenbissectrix AD en AE snijden BC in D en E. Bewijs, dat

1e $\sin b_a \sin b_a' = \sin h_a \sin \text{DE}$.

2e $\cot \text{DE} = \dfrac{\sin(b+c)\sin(b-c)}{2\sin a \sin b \sin c}$.

52. P is het midden van de basis AB van een boldriehoek ABC. De middelloodlijn van de basis wordt door de binnen- en de buitenbissectrix van den tophoek C resp. in E en F gesneden. Bewijs, dat

$$\text{tg EP tg FP} = \sin^2 \tfrac{1}{2}c \cot^2 \tfrac{1}{2}\text{C}\, \frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)} \text{ is.}$$

53. Is ABC een boldriehoek, CD $= x$ de binnenbissectrix van $\angle$ C, die AB in D snijdt, AD $= m$, BD $= n$, dan heeft men:

$$\cos^2 x = \frac{\text{tg}\, n + \text{tg}\, m}{\text{tg}\, n - \text{tg}\, m} : \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}.$$

(Visschers, Wisk. Tijds. 15de jaarg.)

V. OPPERVLAKTE DER BOLDRIEHOEKEN.

§ 120. In § 23 is aangegeven, welk verband bestaat tusschen de oppervlakte van een boldriehoek en zijn spherisch exces E. Zijn de hoeken van een boldriehoek gegeven, dan kan daaruit rechtstreeks de oppervlakte bepaald worden. In alle andere gevallen is men genoodzaakt, uit de gegeven elementen eerst de hoeken en daaruit weer E te bereken, òf E rechtstreeks uit de gegeven elementen te bepalen. Dit laatste is op eenvoudige wijze slechts mogelijk, als gegeven zijn

1^e^ de drie zijden;

2^e^ twee zijden en den ingesloten hoek.

In de volgende paragrafen zullen deze gevallen achtereenvolgens worden nagegaan.

§ 121. Bepaling van E uit de drie zijden.

Men kan hier gebruik maken van de **formule van Lhuilier:**

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-c)}.$$

Bewijs.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}E = \frac{\sin\frac{1}{4}E}{\cos\frac{1}{4}E} = \frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)}{2\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\sin\frac{1}{2}(180^\circ-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos\frac{1}{2}(180^\circ-C)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\sin\frac{1}{2}C}.$$

Volgens de formules van Delambre is nu

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Daardoor wordt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}E = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{4}(-a+b+c) \sin \frac{1}{4}(a-b+c)}{\cos \frac{1}{4}(a+b+c) \cos \frac{1}{4}(a+b-c)} \cot \tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b)}{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-c)} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin (s-a) \sin (s-b)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}s \sin^2 \frac{1}{2}(s-a) \sin^2 \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c) \cos \frac{1}{2}(s-c)}{\cos^2 \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2}(s-a) \cos \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \cos \frac{1}{2}(s-b) \cos^2 \frac{1}{2}(s-c)}}$$

$$= \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-c)}.$$

Opmerking. Omdat

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ,$$

is

$$0 < E < 360^\circ,$$

of

$$0 < \tfrac{1}{4}E < 90^\circ,$$

zoodat men voor $\frac{1}{4}E$ steeds den scherpen hoek nemen moet.

§ 122. Bepaling van E uit twee zijden en den ingesloten hoek.

Als a, b, C de gegeven elementen zijn, dan is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos C}.$$

Bewijs.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)}{\cos \frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}C - \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}C + \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}C}.$$

Volgens de formules van Delambre is

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cos \tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \tfrac{1}{2}C,$$

Daardoor wordt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \frac{\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C - \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{\frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin^2 \frac{1}{2}C + \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cos^2 \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin^2 \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos^2 \frac{1}{2}C} \sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C}{\cos \frac{1}{2}(a+b)(1-\cos C) + \cos \frac{1}{2}(a-b)(1+\cos C)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos C}.$$

Opmerkingen. 1. Om deze formule voor logarithmische berekening geschikt te maken, stelle men

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \cos C = \operatorname{tg} \varphi, \text{ dan wordt}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C}{\cos \frac{1}{2}a (\cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}b \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{\sin \varphi \sin \frac{1}{2}b \operatorname{tg} C}{\cos (\frac{1}{2}b - \varphi)}.$$

(Wat is de meetkundige beteekenis van φ?)

2. Bekijkt men den noemer van bovenstaande breuk, dan blijkt, dat deze de cosinus is van de derde zijde van een boldriehoek, waarvan $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ en C twee zijden en den ingesloten hoek zijn. Noemt men γ den boog, die de middens van AC en BC verbindt, dan is dus

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C}{\cos \gamma}.$$

Is α de verbindingsboog van de middens van AB en AC, en β die van de middens van BA en BC, dan is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c \sin A}{\cos \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}a \sin B}{\cos \beta} = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C}{\cos \gamma}.$$

waaruit na eenige herleidingen volgt:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \cos \tfrac{1}{2}a : \cos \tfrac{1}{2}b : \cos \tfrac{1}{2}c.$$

§ **123**. Zijn gegeven één zijde en de aanliggende hoeken, b.v. c, A en B, dan berekent men eerst C; of ook: men bepaalt a en b en vervolgens E met behulp van de formule van Lhuilier.

Zijn twee zijden gegeven en een hoek tegenover een dier zijden, of twee hoeken en een zijde tegenover een dier hoeken, dan bepale men eerst de onbekende hoeken.

§ **124. Bepaling van E voor een rechthoekigen boldriehoek uit de rechthoekszijden *a* en *b*.**

In dit geval heeft men

$$\mathbf{tg\ \tfrac{1}{2}E = tg\ \tfrac{1}{2}\mathit{a}\ tg\ \tfrac{1}{2}\mathit{b}.}$$

Bewijs.

Omdat $E = A + B + C - 180° = A + B - 90°$, is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B - 90°) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) - 1}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Uit de eerste formule van Neper volgt nu, omdat $C = 90°$ is,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)}.$$

zoodat
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b) - \cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(a - b) + \cos \frac{1}{2}(a + b)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}$$
$$= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b.$$

Opmerking. Omdat $\frac{1}{2}a$ en $\frac{1}{2}b$ scherp zijn, is voor een rechthoekigen boldriehoek

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E > 0,$$
$$\tfrac{1}{2}E < 90°,$$
$$E < 180°.$$

(Zie § 63).

§ 125. Voorbeelden van berekening der oppervlakte van boldriehoeken.

A. *Van een boldriehoek, gelegen op een bol met een straal van 9 cM, is $a = 119°18'14''$, $b = 125°40'16''$, $c = 70°49'38''$.*

Bereken de oppervlakte van dien driehoek.

Berekening.

$a = 119°18'14''$	$s = 157°54'\ 4''$	$\frac{1}{2}s = 78°57'\ 2''$
$b = 125°40'16''$	$s - a = 38°35'50''$	$\frac{1}{2}(s-a) = 19°17'55''$
$c = 70°49'38''$	$s - b = 32°13'48''$	$\frac{1}{2}(s-b) = 16°\ 6'54''$
$2s = 315°48'\ 8''$	$s - c = 87°\ 4'26''$	$\frac{1}{2}(s-c) = 43°32'13''$
		$s = 157°54'\ 4''$ (proef)

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s &= 10{,}70935 - 10\\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-a) &= 9{,}54427 - 10\\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-b) &= 9{,}46078 - 10\\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-c) &= 6{,}97781 - 10\\
\hline
&\ 19{,}69221 - 20\\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}E &= 9{,}84611 - 10\\
\tfrac{1}{4}E &= 35°3'18''.
\end{aligned}$$

Stelt O de oppervlakte voor en r de straal van den bol, dan is

$$O : 4\pi r^2 = E : 720° = 35°3'18'' : 180°,$$

waaruit volgt

$$O = 324\pi \times \frac{126198''}{648000''} = 324\pi \times \frac{126198}{648000}.$$

$$\begin{aligned}
\log 324 &= 2{,}51055\\
\log \pi &= 0{,}49715\\
\log 126198 &= 5{,}10105\\
\hline
&\ 8{,}10875\\
\log 648000 &= 5{,}81158\\
\hline
\log O &= 2.29717\\
O &= 198{,}23 \text{ cM}^2.
\end{aligned}$$

B. *Van een boldriehoek is $a = 41°10'$, $b = 29°50'$, $A = 69°30'$. Bereken de zijde van een gelijkzijdigen boldriehoek op denzelfden bol, die dezelfde oppervlakte als de gegeven driehoek heeft.*

Berekening.

Met de gegevens is slechts één driehoek mogelijk.

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log \sin b = & 9{,}69677 - 10 \\
\log \sin A = & 9{,}97159 - 10 \\
\hline
& 9{,}66836 - 10 \\
\log \sin a = & 9{,}81839 - 10 \\
\hline
\log \sin B = & 9{,}84997 - 10 \\
= & 45°3'52''.
\end{array}$$

Verder is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2}(A - B).$$

$$\begin{array}{llll}
a - b = 11°20' & & \frac{1}{2}(a - b) = 5°40' \\
a + b = 71° & & \frac{1}{2}(a + b) = 35°30' \\
A - B = 24°26'8'' & & \frac{1}{2}(A - B) = 12°13'4''.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \sin \frac{1}{2}(a - b) = & 8{,}99450 - 10 \\
\log \cot \frac{1}{2}(A - B) = & 10{,}66448 - 10 \\
\hline
& 9{,}65898 - 10 \\
\log \sin \frac{1}{2}(a + b) = & 9{,}76395 - 10 \\
\hline
\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = & 9{,}89503 - 10 \\
\frac{1}{2} C = & 38°\ 8'32'' \\
C = & 76°17'\ 4'' \\
A = & 69°30' \\
B = & 45°\ 3'52'' \\
\hline
2S = & 190°50'56''
\end{array}$$

Zijn nu a_1 en A_1 de zijde en de hoek van den gevraagden gelijkzijdigen driehoek, dan is

$$\begin{array}{rl}
3A_1 = & 190°50'56'' \\
A_1 = & 63°36'58'' \\
\frac{1}{2}A_1 = & 31°48'29''
\end{array}$$

en $\cos a_1 = \cot A_1 \cot \frac{1}{2}A_1.$

$$\begin{array}{rl}
\log \cot A_1 = & 9{,}69553 - 10 \\
\log \cot \frac{1}{2}A_1 = & 10{,}20745 - 10 \\
\hline
\log \cos a_1 = & 9{,}90298 - 10 \\
a_1 = & 36°53'19''.
\end{array}$$

Andere formules voor het spherisch exces.

§ 126. Formule van Cagnoli.

$$\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Bewijs.

$$\sin \tfrac{1}{2}E = \sin (S - 90^\circ) = -\cos \tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$= -\cos \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}C + \sin \tfrac{1}{2}(A+B) \sin \tfrac{1}{2}C$$

$$= -\frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}C + \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{2n}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c} = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Opmerking. Omdat $0^\circ < \frac{1}{2}E < 180^\circ$, is het sperisch exces door de formule van Cagnoli niet ondubbelzinnig bepaald. En omdat men bij de formule van Lhuilier slechts vier logarithmen behoeft op te zoeken, is deze voor practische berekeningen beter dan die van Cagnoli.

§ 127. $\cos \frac{1}{2}E = \dfrac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$

Bewijs.

$$\cos \tfrac{1}{2}E = \cos (S - 90^\circ) = \sin \tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$= \sin \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}C + \cos \tfrac{1}{2}(A+B) \sin \tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cos^2 \tfrac{1}{2}C + \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin^2 \tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)(1+\cos C) + \cos \frac{1}{2}(a+b)(1-\cos C)}{2 \cos \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos C}{\cos \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2}a \cos^2 \frac{1}{2}b + \sin a \sin b \cos C}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{(1+\cos a)(1+\cos b) + \sin a \sin b \cos C}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Uit de formule van Cagnoli en uit de laatst gevonden formule kan men door deeling nog afleiden de formule van **De Gua:**

$$\mathbf{tg\ \tfrac{1}{2}E = \frac{2n}{1+\cos a+\cos b+\cos c}}.$$

Het is niet moeilijk, deze formule ook rechtstreeks uit die van § 122 af te leiden.

Opmerking. Hebben α, β en γ dezelfde beteekenis als in § 122, dan blijkt uit bovenstaand bewijs, dat

$$\mathbf{\cos \tfrac{1}{2}E = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{1}{2}a} = \frac{\cos \beta}{\cos \frac{1}{2}b} = \frac{\cos \gamma}{\cos \frac{1}{2}c}}.$$

§ 128. Formules voor sin $\frac{1}{4}$E en cos $\frac{1}{4}$E.

$$\mathbf{\sin \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c)}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}}}$$

$$\mathbf{\cos \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-a) \cos \frac{1}{2}(s-b) \cos \frac{1}{2}(s-c)}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}}}.$$

Bewijs.

Uit § 127 volgt:

$$\sin^2 \tfrac{1}{4}E = \frac{1-\cos\frac{1}{2}E}{2} = \frac{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c - 1 - \cos a - \cos b - \cos c}{8\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a - \cos^2\frac{1}{2}b - \cos^2\frac{1}{2}c + 2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Hieruit volgt door worteltrekking de eerste formule.

Door middel van de betrekking $\cos^2 \frac{1}{4}E = \dfrac{1+\cos\frac{1}{2}E}{2}$ vindt men de formule voor cos $\frac{1}{4}$E.

Door deeling van de beide formules voor sin $\frac{1}{4}$E en cos $\frac{1}{4}$E vindt men de bekende formule van Lhuilier terug.

§ 129. Formules voor sin (A — $\frac{1}{2}$E) en cos (A — $\frac{1}{2}$E).

$$\mathbf{\sin(A-\tfrac{1}{2}E) = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}$$

$$\mathbf{\cos(A-\tfrac{1}{2}E) = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a - \cos^2\frac{1}{2}b - \cos^2\frac{1}{2}c + 1}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}.$$

Bewijs.

$$\sin(A-\tfrac{1}{2}E) = \cos(-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C) =$$

$$= \cos\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C + \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}c} = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{n}{2 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}.$$

$$\cos (A - \tfrac{1}{2}E) = \sin (- \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C)$$

$$= \cos \tfrac{1}{2} (A - B) \sin \tfrac{1}{2}C - \sin \tfrac{1}{2} (A - B) \cos \tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2}c} \sin^2 \tfrac{1}{2}C - \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2}c} \cos^2 \tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b) (1 - \cos C) - \sin \frac{1}{2} (a - b) (1 + \cos C)}{2 \sin \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b - \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos C}{\sin \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2}a \sin^2 \frac{1}{2}b - \sin a \sin b \cos C}{4 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2}a(1 - \cos^2 \frac{1}{2}b) - (2 \cos^2 \frac{1}{2}c - 1) + (2 \cos^2 \frac{1}{2}a - 1)(2 \cos^2 \frac{1}{2}b - 1)}{4 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c.}$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}a - \cos^2 \frac{1}{2}b - \cos^2 \frac{1}{2}c + 1}{2 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}.$$

Opmerkingen. 1. Omdat $0 < A - \frac{1}{2}E < 180^\circ$ is, moet in de formule voor $\sin (A - \frac{1}{2}E)$ de positieve wortel genomen worden.

2. De formule voor $\sin (A - \frac{1}{2}E)$ kan ook verkregen worden door toepassing van de formule van Cagnoli op den nevendriehoek A′BC. en die voor $\cos (A - \frac{1}{2}E)$ door toepassing van § 127 op denzelfden nevendriehoek.

§ 130. Formules voor $\sin (\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}E)$, $\cos (\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}E)$, $\mathrm{tg}\, (\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}E)$.

$$\sin (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}E) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2} (s - a) \sin \frac{1}{2} (s - b) \sin \frac{1}{2} (s - c)}{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}}$$

$$\cos (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}E) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2} (s - a) \cos \frac{1}{2} (s - b) \cos \frac{1}{2} (s - c)}{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}}$$

$$\mathrm{tg}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}E) = \sqrt{\cot \tfrac{1}{2}s \cot \tfrac{1}{2} (s - a) \,\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} (s - b) \,\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} (s - c)}.$$

Deze formules kunnen verkregen worden door toepassing van de formules voor $\sin \frac{1}{4}E$, $\cos \frac{1}{4}E$ en $\mathrm{tg}\, \frac{1}{4}E$ op den nevendriehoek A′BC.

§ 131. Meetkundige voorstelling van E.

Zij ABC (fig. 65) een boldriehoek, D, E en F de middens der zijden, P en P′ de snijpunten van DE met AB. Laat men uit A de

loodlijn AG, en uit C de loodlijn CM op DE neer, dan is (zie § 26) $\angle$ GAB $=$ S $= \frac{1}{2}$ (A $+$ B $+$ C) $= \frac{1}{2}$ (180° $+$ E) $=$ 90° $+ \frac{1}{2}$E, zoodat
$\angle$ GAP $=$ 90° $- \frac{1}{2}$E.

Trekt men nog AH $\perp$ AB, dan is dus

$\angle$ **GAH** $= \frac{1}{2}$**E.**

Maakt men P′K $= \frac{1}{2}c$ en trekt KL $\perp$ AB, dan is ook

KL $= \frac{1}{2}$**E.**

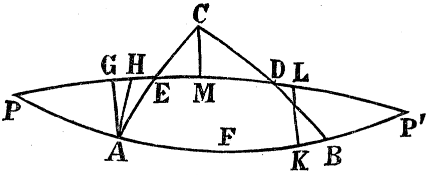


Fig. 65.

Omdat nl. KA $=$ 90°, is K een pool van AH. Evenzoo is L een pool van AG, zoodat

$$\mathrm{KL} = \angle\, \mathrm{GAH} = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}.$$

Verschillende van de vroeger voor het spherisch exces afgeleide formules kunnen nu ook uit bovenstaande figuur worden verkregen.

In § 26 werd gevonden:

$$\mathrm{PG} + \mathrm{ED} = 90^\circ, \text{ en omdat } \mathrm{LG} = 90^\circ, \text{ is}$$
$$\mathrm{PG} + \mathrm{LP'} = 90^\circ,$$
$$\text{zoodat} \qquad \mathrm{LP'} = \mathrm{ED} = \gamma.$$

In den rechthoekigen driehoek LKP′ is verder

$$\cos \mathrm{LK} = \frac{\cos \mathrm{LP'}}{\cos \mathrm{KP'}},$$

$$\text{of} \quad \cos \tfrac{1}{2}\mathrm{E} = \frac{\cos \gamma}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

In denzelfden driehoek is

$$\sin \mathrm{KL} = \sin \mathrm{LP'} \sin \mathrm{P'},$$

$$\text{of} \quad \sin \tfrac{1}{2}\mathrm{E} = \sin \gamma \sin \mathrm{P} = \frac{\sin \gamma \sin \mathrm{AG}}{\sin \mathrm{AP}}$$

$$= \frac{\sin \gamma \sin \mathrm{CM}}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \mathrm{C}}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{n}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Dit is de formule van Cagnoli.

§ 132. Eigenschap. Als boldriehoeken een hoek gelijk hebben, en het product van de tangenten der halve zijden om dien hoek standvastig is, dan hebben die driehoeken dezelfde oppervlakte.

Bewijs.

In § 122 werd gevonden de formule

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{E} = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \mathrm{C}}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \mathrm{C}}.$$

Hieruit leidt men af:

$$\cot \tfrac{1}{2}E = \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C} + \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos C}{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C},$$

$$\boldsymbol{\cot \tfrac{1}{2}E = \frac{\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b}{\sin C} + \cot C.}$$

Zijn nu C en $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b$ constant, dan is dit ook het geval met E en dus ook met de oppervlakte.

Opmerkingen. 1. Deze eigenschap komt overeen met de bekende eigenschap uit de vlakke meetkunde, dat de oppervlakte van een driehoek niet verandert, als een hoek en het product der zijden om dien hoek standvastig blijven.

2. Past men bovengenoemde eigenschap op den pooldriehoek toe, dan vindt men de volgende stelling:

Als boldriehoeken een zijde gelijk hebben, en het product van de tangenten der halve aanliggende hoeken standvastig is, dan hebben die driehoeken denzelfden omtrek.

§ 133. Eigenschap. Als de boog CP de oppervlakte van den boldriehoek ABC halveert, dan is

$$\boldsymbol{\sin \tfrac{1}{2}AP : \sin \tfrac{1}{2}BP = \cos \tfrac{1}{2}AC : \cos \tfrac{1}{2}BC.}$$

Bewijs.

Noem E_1 en E_2 de spherische excessen der driehoeken APC en BPC, $2n_1$ en $2n_2$ hun sinussen, dan is

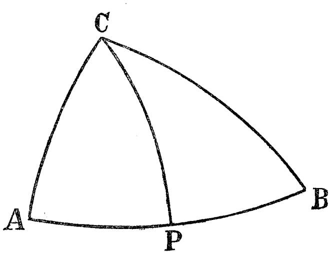


Fig. 66.

$$E_1 = A + ACP + APC - 180^\circ$$
$$E_2 = B + BCP + BPC - 180^\circ$$

op

$$E_1 + E_2 = A + B + C - 180^\circ = E.$$

De driehoeken APC en BPC zullen dezelfde oppervlakte hebben, als

$$E_1 = E_2 = \tfrac{1}{2}E.$$

Nu is volgens de formule van Cagnoli

$$\sin \tfrac{1}{2}E_1 = \frac{n_1}{2 \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}CP \cos \frac{1}{2}AP},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}E_2 = \frac{n_2}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}CP \cos \frac{1}{2}BP},$$

waaruit volgt:

$$n_1 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}BP = n_2 \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}AP.$$

Verder is
$$2n_1 = \sin AP \sin h_c,$$
$$2n_2 = \sin BP \sin h_c,$$

waardoor de laatste vergelijking overgaat in

$$\sin AP \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}BP = \sin BP \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}AP,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}AP \cos \tfrac{1}{2}a = \sin \tfrac{1}{2}BP \cos \tfrac{1}{2}b,$$
of $$\sin \tfrac{1}{2}AP : \sin \tfrac{1}{2}BP = \cos \tfrac{1}{2}AC : \cos \tfrac{1}{2}BC.$$

Opmerking. Met behulp van het omgekeerde van het theorema van de Céva kan men nu bewijzen:

De groote cirkels door de hoekpunten, die de oppervlakte van een boldriehoek halveeren, snijden elkaar in één punt (Punt van Steiner).

Daartoe moeten eerst sin AP en sin BP berekend worden, òf men bewijst, dat

$$\sin ACP : \sin BCP = \sin (A - \tfrac{1}{4}E) : \sin (B - \tfrac{1}{4}E).$$

Omtrent de normale coördinaten van het punt van Steiner heeft men
$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \operatorname{cosec}(A - \tfrac{1}{4}E) : \operatorname{cosec}(B - \tfrac{1}{4}E) : \operatorname{cosec}(C - \tfrac{1}{4}E).$

§ 134. Eigenschap. De oppervlakte van een boldriehoek, waarvan twee zijden een constante lengte hebben, is zoo groot mogelijk, als de door die zijden ingesloten hoek gelijk is aan de som der beide andere hoeken (§ 42).

Bewijs.

Volgens een der analogieën van Neper is

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}{\cot \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-E)}.$$

Hebben a en b constante lengte, dan zijn ook bovenstaande breuken constant. Men kan dus stellen

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-E)} = k = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)},$$

waarin k een constante voorstelt.

Uit deze vergelijking volgt, door $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C - E)$ uit te werken:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E + (1-k) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C + k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = 0.$$

C zal reeël zijn, als

$$4k \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}E - (k-1)^2 \lesseqgtr 0.$$

Hieruit volgt, dat E een maximumwaarde heeft, als

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}E = \frac{(k-1)^2}{4k},$$

of, daar $$k = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)},$$

als $$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}E = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}a \sin^2 \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Vervangt men hierin $\sin^2 \frac{1}{2}a$ en $\sin^2 \frac{1}{2}b$ door de formulus van § 77 en de factoren in den noemer door de waarden, waaraan zij volgens de formules van Delambre gelijk zijn, dan verkrijgt men na eenige herleidingen

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{E} = \frac{\cos^2 \mathrm{S}}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin \mathrm{C}} = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{E}}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin \mathrm{C}}.$$

Hieruit volgt:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{E} = \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin \mathrm{C},$$
$$\cos \mathrm{E} = 2\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin \mathrm{C} - 1,$$
$$\cos \mathrm{E} = \cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}) + \cos \mathrm{E} - 1,$$
$$\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}) = 1,$$
$$\text{of} \quad \mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{C}.$$

§ 135. De functie van Lhuilier.

Aldus noemt men op voorstel van Casey den vorm

$$\sqrt{\cot \tfrac{1}{2}s \; \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(s-a)\; \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(s-b)\; \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(s-c)}.$$

Men stelt hem voor door de letter L.

De formule van Lhuilier voor het spherisch exces, en de in § 130 gevonden formules voor tg $(\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \tfrac{1}{4}\mathrm{E})$ enz., kunnen nu volgenderwijze geschreven worden:

$$\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{4}\mathrm{E} = \frac{\mathrm{L}}{\cot \tfrac{1}{2}s},$$
$$\mathrm{tg}\, (\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \tfrac{1}{4}\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(s-a)},$$
$$\mathrm{tg}\, (\tfrac{1}{2}\mathrm{B} - \tfrac{1}{4}\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(s-b)},$$
$$\mathrm{tg}\, (\tfrac{1}{2}\mathrm{C} - \tfrac{1}{4}\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(s-c)}.$$

Door vermenigvuldiging dezer vergelijkingen komt een formule voor L, uitgedrukt in de hoeken:

$$\mathrm{L} = \sqrt{\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{4}\mathrm{E}\; \mathrm{tg}\, (\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \tfrac{1}{4}\mathrm{E})\; \mathrm{tg}\, (\tfrac{1}{2}\mathrm{B} - \tfrac{1}{4}\mathrm{E})\; \mathrm{tg}\, (\tfrac{1}{2}\mathrm{C} - \tfrac{1}{4}\mathrm{E})}.$$

Deze formules stellen ons in staat, een boldriehoek op te lossen, als gegeven zijn

1e de drie zijden; 2e de drie hoeken.

§ 136. Vraagstukken.

1. Bepaal E, als
   1e $a = 60°$, $b = 50°$, $c = 30°$,
   2e $a = 50°$, $b = 60°$, $c = 70°$,
   3e $a = b = c = 115°42'23''$.
2. Bereken het oppervlak van een boldriehoek, als
   1e $a = 72°24'35''$, $b = 68°19'25''$, $c = 84°$, straal bol $= 14$.
   (Toel. Univ. 1909).

2^e $a = 80°25'$, $B = 34°40'$, $C = 40°5'30''$, straal bol $= 7{,}25$.
(Toel. Univ. 1909).

3. Van een gelijkzijdigen boldriehoek is de zijde 60°. Bewijs, dat $\text{tg}\, \frac{1}{2}E = \frac{1}{5}\sqrt{2}$.
4. Als de zijde a van een gelijkzijdigen boldriehoek gelijk is aan
   1^e $\frac{1}{2}$ boog cos $(5 - 4\sqrt{2})$, $(\pi/_2 < a < \pi)$
   2^e $\frac{1}{2}$ boog tg $\frac{4}{3}$ $(\pi/_2 < a < \pi)$
   3^e boog cos $(3 - 2\sqrt{3})$,
   dan is de oppervlakte van dien driehoek
   1^e $\frac{5}{16}$, 2^e $\frac{7}{20}$, 3^e $\frac{3}{8}$ van het boloppervlak.
5. Bereken de oppervlakte van een gelijkzijdigen boldriehoek, als
   1^e $a = b = c =$ boog cos $(-\frac{1}{3})$.
   2^e $a = b = c =$ boog tg 2.
6. Van een rechthoekigen gelijkbeenigen boldriehoek met rechthoekszijden van 45° is $\text{tg}\, E = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.
7. Van een boldriehoek is $a = b = c = 90°$. Men verbindt de middens der zijden door bogen van groote cirkels. Bepaal de oppervlakte van den door die bogen gevormden driehoek, als de straal van den bol 1 dM is.
8. Van een boldriehoek is $a = b = 60°$, $c = 90°$. Bewijs, dat $\cos E = \frac{7}{9}$.
9. Van een boldriehoek is $b = 70°$, $a - c = 20°$, $B = 80°30'$. Bereken het oppervlak. Straal bol $= 10$.
10. Op een bol, waarvan de straal 1 M is, is een gelijkzijdige boldriehoek geconstrueerd, waarvan de oppervlakte 1 M^2 is. Bereken de zijde van dien boldriehoek. (Toel. Univ. 1905).
11. Van een rechthoekigen gelijkbeenigen boldriehoek ($\angle C = 90°$) vraagt men de zijden te berekenen, als de oppervlakte van dien driehoek 1^e $\frac{1}{10}$, 2^e $\frac{1}{12}$ van het boloppervlak is.
12. Van een boldriehoek is $a = 150°$, $b = 120°$. Bepaal C, als de oppervlakte van dien driehoek $\frac{1}{10}$ van het boloppervlak moet zijn.
13. Van een rechthoekigen boldriehoek is de schuine zijde 72°, terwijl de oppervlakte $\frac{1}{36}$ van het boloppervlak is. Bereken de scheeve hoeken.
14. Bepaal de elementen van een gelijkzijdigen boldriehoek, als het oppervlak $^1/_4$ van dat van den bol is.
15. Bewijs, dat $\text{tg}\, \frac{1}{4}E \cot \frac{1}{2}(C - \frac{1}{2}E) = \text{tg}\, \frac{1}{2}s \,\text{tg}\, \frac{1}{2}(s - c)$.
    Bepaal daarna de onbekende elementen van een boldriehoek, als

1e $a + b = 80°32'53''$, $c = 40°4''$, $E = 12°44'$.
2e $a + b = 209°4'38''$, $c = 133°26'29''$, $E = 200°46'53''$.

16. Bepaal de onbekende elementen van een boldriehoek, als
1e $a + b - c = 102°23'46''$, $A + B = 170°12'52''$,
$C = 20°9'54''$. (Zie n°. 15).
2e $2s = 199°2'$, $E = 24°36'$, $A = 102°52'$. (Zie n°. 15).
3e $c = 26°11'15''$, $A = 53°19'34''$, $A + B - C = 80°28'10''$.

17. Van een boldriehoek is $E = 182°53'22''$ en zijn de stukken, waarin $\angle C$ door de mediaan m_c verdeeld wordt, $97°2'56''$ en $47°19'46''$. Bereken A en B. Toel. Univ. 1911).

18. Van een boldriehoek is $A = 112°14'25''$, $B = 40°22'40''$, $C = 50°36'50''$. Bereken de zijde van een gelijkzijdigen boldriehoek, die op denzelfden bol gelegen is, en een even groot oppervlak heeft.

19. Van een boldriehoek is $a = 58°37'40''$, $b = 69°21'10''$, $C = 78°15'30''$. Bereken de zijde van den gelijkzijdigen boldriehoek, op denzelfden bol gelegen, waarvan de oppervlakte 2 maal zoo groot is als die van den gegeven driehoek.
(Landmeter 1904).

20. Bepaal op de zijde c van een boldriehoek ABC een punt D zoodanig, dat de oppervlakte van den driehoek door boog CD wordt gehalveerd, als
1e $a = 44°$, $b = 55°$, $c = 66°$;
2e $a = 50°$, $b = 70°$, $c = 60°$.

21. Van een boldriehoek is $c = 120°$, $A = B = 90°$. Men past op CA en CB twee even groote bogen CD en CE af zoodanig, dat boog DE de oppervlakte van den gegeven driehoek halveert. Bereken CD.

22. Van een boldriehoek ABC is $AC = 60°$, $BC = 75°$ en $\angle C = 45°$. D ligt op het midden van AC. Bepaal op BC een punt E zoodanig, dat de oppervlakte van $\triangle$ DCE $\frac{1}{5}$ van die van $\triangle$ ABC is.

23. Bewijs dat in een rechthoekigen boldriehoek ($C = 90°$)

1e $\sin E = \dfrac{\sin a \sin b}{2 \cos^2 \frac{1}{2}c}$ (Toel. Univ. 1912).

2e $\cos E = \dfrac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}$.

3e $\sin \frac{1}{2}E = \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sec \frac{1}{2}c$.

4e $\cos \frac{1}{2}E = \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sec \frac{1}{2}c$.

24. In een gelijkzijdigen boldriehoek is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{3}{4}a \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{4}a}.$$

25. In elken boldriehoek is

$$\sin \tfrac{1}{2}E = 2 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c \frac{\sin C}{\sin c}. \quad \text{(Toel. Univ. 1909).}$$

26. Als $1 + \cos a + \cos b + \cos c = 0$, dan is $E = 180°$.
27. Als $\cos a + \cos b = 1 + \cos c$, dan is $E = 2C - 180°$.
28. Bewijs, dat de som der oppervlakken van een boldriehoek en zijn nevendriehoeken gelijk is aan het halve bolоppervlak.
29. Leidt uit de formule $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b$ (§ 124) een formule voor den pooldriehoek af.
30. Bewijs de volgende formules

1e $\sin (A - \tfrac{1}{2}E) = \dfrac{\cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a} \sin A.$

2e $\cos \tfrac{1}{2}(A - E) = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}a} \cos \tfrac{1}{2}A.$

31. Als E_1, E_2 en E_3 de spherische excessen der nevendriehoeken A′BC, AB′C en ABC′ zijn, dan is

1e $\sin \tfrac{1}{2}E_1 : \sin \tfrac{1}{2}E = \cot \tfrac{1}{2}b \cot \tfrac{1}{2}c.$

2e $\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4}E_1 = \cot \tfrac{1}{2}s \cot \tfrac{1}{2}(s - a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s - c).$

3e $\sin s = \dfrac{\sqrt{\sin \frac{1}{2}E \sin \frac{1}{2}E_1 \sin \frac{1}{2}E_2 \sin \frac{1}{2}E_3}}{2 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}.$

4e $\sin^2 \tfrac{1}{2}E = \dfrac{\sqrt{\sin \frac{1}{2}E \sin \frac{1}{2}E_1 \sin \frac{1}{2}E_2 \sin \frac{1}{2}E_3}}{\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b \cot \frac{1}{2}c}.$

Is bovendien φ het spherisch exces van den pooldriehoek, dan is

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4}\varphi = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{4}E_1 \operatorname{tg} \frac{1}{4}E_2 \operatorname{tg} \frac{1}{4}E_3}{\operatorname{tg} \frac{1}{4}E}.$$

32. Van een boldriehoek ABC, waarvan $\cos^2 \tfrac{1}{2}(a - b) = \cos \tfrac{1}{2}c$, is CD een mediaan. Op CA en CB past men bogen CE en CF af gelijk aan CD. Bewijs, dat de oppervlakken der driehoeken CEF en CAB even groot zijn. (§ 132).
33. Van een boldriehoek ABC is $A = B = C = 90°$. Een willekeurig punt P op het boloppervlak wordt door bogen van groote cirkels met A, B en C verbonden. Bewijs dat

$$\cos^2 PA + \cos^2 PB + \cos^2 PC = 1.$$

Vervolgens neemt men P binnen den gegeven driehoek, stelt $PA = \alpha$, $PB = \beta$, $PC = \gamma$ en construeert een boldriehoek, waarvan 2α, 2β en 2γ de zijden zijn. Bewijs, dat de oppervlakte van dezen driehoek tweemaal zoo groot is als die van $\triangle$ ABC.

34. D, E en F zijn de middens der zijden BC, CA en AB van een boldriehoek ABC. DE maakt met AB den hoek ϑ. Bewijs:

1e Als AB en de oppervlakte constant zijn, dan is DE constant (§ 127);

2e Als DE $= 90°$, dan is ook EF $=$ FD $= 90°$, en $A + B + C = 360°$. (§ 127).

3e $\cot \vartheta = \dfrac{(1 + \cos a + \cos b + \cos c) \sin \frac{1}{2}c}{2n}$. (§ 127 en 131).

35. De middens der zijden BC, CA en AB van boldriehoek ABC zijn D, E en F. Men trekt AA_1, BB_1, CC_1 resp. loodrecht op EF, FD en DE. Bewijs, dat

$$\operatorname{tg} AA_1 : \operatorname{tg} BB_1 : \operatorname{tg} CC_1 = \cot \tfrac{1}{2}a : \cot \tfrac{1}{2}b : \cot \tfrac{1}{2}c. \quad (\S\ 131).$$

36. In de figuur van n°. 35 maken EF en BC den hoek φ_1, DF en CA den hoek φ_2, ED en AB den hoek φ_3. ABC′ is een nevendriehoek van ABC; G en H zijn de middens van AC′ en BC′; de sinussen der boldriehoeken AFE, BFD, CDE, DEF en FGH zijn $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$, $2n_4$, $2n_c$. Bewijs, dat

1e $\sin EF \sin \varphi_1 = \sin DF \sin \varphi_2 = \sin ED \sin \varphi_3 = \sin \frac{1}{2}E$.

2e $2n_4 = \sin \frac{1}{2}E$, $2n_c = \sin (C - \frac{1}{2}E)$.

3e $\operatorname{tg} FE \operatorname{tg} FG = \operatorname{tg} FD \operatorname{tg} FH$.

4e $\cos DG = \dfrac{-\cos a + \cos b + \cos c - 1}{4 \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}$;

$$\cos EH = \frac{\cos a - \cos b + \cos c - 1}{4 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}.$$

5e $n_1 : n_2 : n_3 : n_4 : n = \cos \frac{1}{2}a : \cos \frac{1}{2}b : \cos \frac{1}{2}c : 1 : 4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$.

37. De sinus van den boldriehoek, waarvan de hoekpunten liggen op de middens der zijden van boldriehoek ABC, is $2n_4$; de sinus van den boldriehoek, waarvan de hoekpunten liggen op de middens der zijden van den nevendriehoek A′BC, is $2n_a$, enz. Bewijs, dat

$$n_a + n_b + n_c - n_4 = 2 \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C.$$

38. In boldriehoek ABC is CD een mediaan. Als E_1 en E_2 de spherische excessen der driehoeken ACD en BCD zijn, bewijs dan, dat

$$\sin \tfrac{1}{2}E_1 : \sin \tfrac{1}{2}E_2 = \cos \tfrac{1}{2}a : \cos \tfrac{1}{2}b.$$

VI. OM-, IN- EN AANGESCHREVEN CIRKELS VAN EEN BOLDRIEHOEK. EENIGE EIGENSCHAPPEN VAN KLEINE CIRKELS.

---

§ 137. Formules voor den spherischen straal R van den omgeschreven cirkel.

$$\mathbf{tg\,R} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}$$

$$= \frac{-\cos S}{\sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}.$$

Bewijs.

Zij in fig. 67 M de pool van den omgeschreven cirkel. De loodlijn MF op AB deelt de basis middendoor. In den rechthoekigen boldriehoek MAF is nu

$$\angle MAF = S - C \text{ (§ 24)},$$
$$AF = \tfrac{1}{2}c,$$
$$AM = R.$$

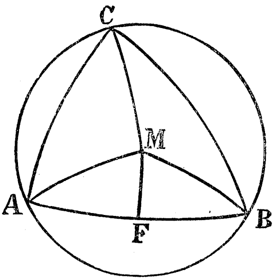


Fig. 67.

Past men op dien driehoek den regel van Neper toe, dan komt er

$$\cos (S - C) = \cot R \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c.$$

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\cos (S-C)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}C + \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C + \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}c}{\{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2}(a-b)\} \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sin C}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{n}.$$

Verder is

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\cos (S - C)} = \frac{1}{\cos (S - C)} \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - C)}{\cos (S - A) \cos (S - B)}}$$

$$= \frac{-\cos S}{N}.$$

Opgave. Bewijs, dat voor een rechthoekigen boldriehoek

$$\operatorname{tg} R = \frac{\sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b} = \sqrt{\frac{-2 \cot S}{\cos (A - B)}}.$$

§ 138. Formules voor de spherische stralen R_1, R_2, R_3 van de omgeschreven cirkels der nevendriehoeken A'BC, AB'C, ABC'.

$$\operatorname{tg} \mathbf{R_1} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{n} = \frac{\cos (S - A)}{N}.$$

Bewijs.

Bedenkt men, dat $2n = \sin b \sin c \sin A$, dan blijkt, dat de sinus van den nevendriehoek A'BC gelijk is aan die van den oorspronkelijken driehoek ABC.

Past men de eerste formule van de vorige paragraaf toe op den driehoek A'BC, dan wordt

$$\operatorname{tg} R_1 = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}(180^\circ - b) \sin \frac{1}{2}(180^\circ - c)}{n}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{n}.$$

Op gelijksoortige manier, of door beschouwing eener figuur, wordt de tweede formule afgeleid.

De formules voor tg R_2 en tg R_3 worden hieruit door letterverwisseling afgeleid.

Opmerking. Omdat de nevendriehoek A'BC de tegendriehoek is van den topdriehoek AB'C', zijn R_1, R_2 en R_3 tevens de spherische stralen van de omgeschreven cirkels der boldriehoeken AB'C', A'BC' en A'B'C.

§ 139. Formules voor den spherischen straal r van den ingeschreven cirkel.

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}}{\sin s}$$

$$= \frac{\sqrt{-\cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}.$$

Bewijs.

Zij I in fig. 68 de pool van den ingeschreven cirkel, en F het raakpunt op de zijde AB. Dan is in den rechthoekigen boldriehoek AFI

$$\angle FAI = \tfrac{1}{2}A,$$
$$AF = s - a,$$
$$IF = r,$$

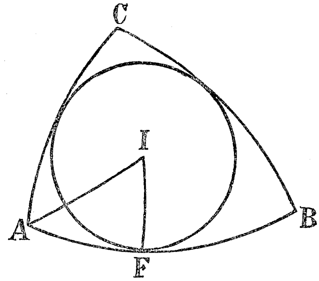


Fig. 68.

waaruit volgt:

$$\sin(s-a) = \cot\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} r,$$

$$\operatorname{tg} r = \sin(s-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A$$
$$= \sin(s-a)\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}} = \frac{n}{\sin s}.$$

Verder is $\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \sin\dfrac{-a+b+c}{2}$

$$= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\left\{\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}a - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}a\right\}$$

$$= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\left\{\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a - \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A}\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a\right\}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}\left\{\cos\tfrac{1}{2}(B-C) - \cos\tfrac{1}{2}(B+C)\right\}\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a$$

$$= \frac{\sin B\sin C\sin a}{4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = \frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Opgave. Bewijs, dat voor een rechthoekigen boldriehoek

$$\operatorname{tg} r = \sin(s-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin c}{\cos\frac{1}{2}C}.$$

§ 140. Formules voor de spherische stralen r_1, r_2, r_3 van de ingeschreven cirkels der nevendriehoeken A′BC, AB′C en ABC′.

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{n}{\sin(s-a)} = \frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.$$

De formules voor tg r_2 en tg r_3 worden hieruit door letterverwisseling afgeleid.

Bewijs.

Omdat de sinussen der driehoeken ABC en A′BC even groot zijn, verkrijgt men door toepassing van de eerste formule uit de voorgaande paragraaf op den nevendriehoek A′BC:

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{n}{\sin\frac{a+180^\circ-b+180^\circ-c}{2}} = \frac{n}{\sin\{180^\circ-(s-a)\}} = \frac{n}{\sin(s-a)}.$$

De tweede formule kan op gelijksoortige manier afgeleid worden. Uit de figuur aldus: r_1 is een rechthoekszijde van een rechthoekigen boldriehoek, waarvan $s-c$ de andere rechthoekszijde en $90^\circ - \frac{1}{2}B$ de overstaande scheeve hoek is. Men heeft dus

$$\sin(s-c) = \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} r_1 &= \sin(s-c)\cot\tfrac{1}{2}B \\
&= \{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}c - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}c\}\cot\tfrac{1}{2}B \\
&= \left\{\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} - \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}\right\}\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c\cot\tfrac{1}{2}B \\
&= \frac{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c\cot\tfrac{1}{2}B \\
&= \frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin c}{\sin\frac{1}{2}C} \\
&= \frac{2N}{4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = \frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.
\end{aligned}$$

Opmerkingen. 1. *De ingeschreven cirkels der nevendriehoeken zijn tevens de aangeschreven cirkels van den oorspronkelijken driehoek.*

2. Omdat de nevendriehoek A′BC de tegendriehoek is van den topdriehoek AB′C′, zijn r_1, r_2 en r_3 tevens de spherische stralen van de ingeschreven cirkels der topdriehoeken AB′C′, A′BC′ en A′B′C.

§ 141. Bepaling van de spherische stralen R_p en r_p der om- en ingeschreven cirkels van den pooldriehoek.

Past men de eerste formule van § 137 op den pooldriehoek toe, dan vindt men, daar 2N de sinus van dien driehoek is:

$$\operatorname{tg} R_p = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{N},$$

waaruit in verband met § 139 volgt, dat

$$\operatorname{tg} R_p = \cot r,$$

en omdat R_p en r kleiner dan 90° zijn, is

$$\mathbf{R_p + r = 90^\circ.}$$

Past men de eerste formule van § 139 toe op den pooldriehoek, dan vindt men

$$\operatorname{tg} r_p = \frac{N}{\sin(270^\circ - S)} = -\frac{N}{\cos S},$$

waaruit in verband met § 137 volgt, dat

$$\operatorname{tg} r_p = \cot R,$$

en daar r_p en R kleiner dan $90°$ zijn, is

$$\boldsymbol{r_p + R = 90°.}$$

Men heeft dus de

Eigenschappen. De straal van den ingeschreven cirkel van een boldriehoek is het complement van den straal van den omgeschreven cirkel van den pooldriehoek.

De straal van den omgeschreven cirkel van een boldriehoek is het complement van den straal van den ingeschreven cirkel van den pooldriehoek.

Het is niet moeilijk van deze eigenschappen een meetkundig bewijs te geven. Laat I (fig. 69) de pool van den ingeschreven cirkel van boldriehoek ABC zijn, D, E en F de raakpunten op de zijden BC, CA en AB, dan staan de bogen ID, IE IF loodrecht op die zijden. Verlengt men DI, EI, en FI tot A'', B'' en C'' zoodanig, dat $DA'' = EB'' = FC'' = 90°$, dan is $A''B''C''$ de pooldriehoek van ABC. Hier volgt tevens:

$$IA'' = IB'' = IC'',$$

zoodat I ook de pool van den omgeschreven cirkel van den pooldriehoek is, en

$$R_p + r = 90°.$$

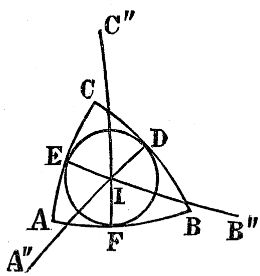


Fig. 69.

Het meetkundig bewijs van de tweede eigenschap wordt aan den lezer overgelaten.

Tevens blijkt uit dit bewijs, dat de pool van den ingeschreven cirkel van een boldriehoek samenvalt met de pool van den omgeschreven cirkel van den pooldriehoek, en omgekeerd.

Voorbeelden van oplossing van vraagstukken.

§ **142. Eerste voorbeeld.** *Van een boldriehoek zijn gegeven: c, C en R. Bepaal de onbekende elementen.*

Men heeft (§ 137)

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\cos(S - C)}.$$

of $$\cos(S - C) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \cot R.$$

Hierin zijn c, C en R bekend, zoodat S en vervolgens $A + B$ kan gevonden worden. Door middel van de formules van Delambre kunnen nu de onbekende zijden en hoeken bepaald worden.

Opmerking. Er zijn twee oplossingen.

Tweede voorbeeld. *Bepaal de zijde van een gelijkzijdigen boldriehoek, als de spherische straal van den omgeschreven cirkel 45° is.*

Substitueert men in de formule

$$\operatorname{tg} R = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}$$

$R = 45°$, $b = c = a$, dan komt er

$$\sin \tfrac{3}{2}a \sin^3 \tfrac{1}{2}a = 4 \sin^6 \tfrac{1}{2}a,$$

of $$\sin \tfrac{3}{2}a = 4 \sin^3 \tfrac{1}{2}a.$$

Door de deeling is geen bruikbare wortel verdreven.

Verder is
$$3 \sin \tfrac{1}{2}a - 4 \sin^3 \tfrac{1}{2}a = 4 \sin^3 \tfrac{1}{2}a,$$
$$8 \sin^3 \tfrac{1}{2}a = 3 \sin \tfrac{1}{2}a,$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \tfrac{3}{8},$$
$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4},$$

zoodat $$a = \text{boog} \cos \tfrac{1}{4}.$$

Derde voorbeeld. *Van een boldriehoek zijn gegeven: r, r_1 en $b + c$. Bereken de onbekende elementen.*

Men heeft
$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \sin (s - a),$$
$$\operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \sin s,$$

waaruit volgt

$$\frac{\operatorname{tg} r_1}{\operatorname{tg} r} = \frac{\sin s}{\sin (s-a)},$$

$$\frac{\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r_1 - \operatorname{tg} r} = \frac{\sin s + \sin (s-a)}{\sin s - \sin (s-a)}.$$

$$\frac{\sin (r_1 + r)}{\sin (r_1 - r)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(b+c) \cos \frac{1}{2}a}{2 \cos \frac{1}{2}(b+c) \sin \frac{1}{2}a} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b+c) \cot \tfrac{1}{2}a.$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin (r_1 - r)}{\sin (r_1 + r)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b+c).$$

Deze formule stelt ons in staat, a te berekenen.

Vervolgens vindt men A uit

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{tg} r_1}{\sin s}.$$

Daarna geven de formules van Delambre de onbekende elementen.

§ 143. Andere formules. Eenige merkwaardige betrekkingen tusschen de stralen der om-, in- en aangeschreven cirkels.

In § 137 werd gevonden

$$\operatorname{tg} R = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}.$$

Nu is

$$\sin (s-a) + \sin (s-b) + \sin (s-c) - \sin s =$$
$$2 \sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}(a-b) - 2 \sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}(a+b) =$$
$$2 \sin \tfrac{1}{2}c \{\cos \tfrac{1}{2}(a-b) - \cos \tfrac{1}{2}(a+b)\} = 4 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c,$$

waardoor bovenstaande formule overgaat in

$$\mathbf{tg\, R} = \frac{\sin (s-a) + \sin (s-b) + \sin (s-c) - \sin s}{2n}$$

Evenzoo heeft men

$$\mathbf{tg\, R_1} = \frac{-\sin (s-a) + \sin (s-b) + \sin (s-c) + \sin s}{2n},$$

en gelijksoortige formules voor tg R_2 en tg R_3.

In § 139 werd gevonden

$$\operatorname{tg} r = \frac{N}{2 \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C}.$$

Nu bewijst men gemakkelijk, dat

$$4 \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C = \cos S + \cos (S-A) + \cos (S-B) + \cos (S-C),$$

zoodat

$$\mathbf{cot}\, r = \frac{\cos S + \cos (S-A) + \cos (S-B) + \cos (S-C)}{2N}.$$

Evenzoo heeft men

$$\mathbf{cot}\, r_1 = \frac{-\cos S - \cos (S-A) + \cos (S-B) + \cos (S-C)}{2N},$$

en gelijksoortige formules voor cot r_2 en cot r_3.

Formules, waarvan later gebruik zal gemaakt worden, zijn de volgende:

$$(\cot r + \operatorname{tg} R)^2 = \frac{(\sin a + \sin b + \sin c)^2}{4n^2} - 1.$$

$$(\cot r_1 - \operatorname{tg} R)^2 = \frac{(-\sin a + \sin b + \sin c)^2}{4n^2} - 1.$$

De eerste formule wordt op de volgende manier afgeleid,

$$\text{t}\, r + \operatorname{tg} R = \frac{\sin s}{n} + \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}{n}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c + \sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c + \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c + \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}{n}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}(b-c) + \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(b+c)}{n}.$$

Hieruit volgt

$(\cot r + \operatorname{tg} R)^2 =$

$$= \frac{4\sin^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}(b-c) + 4\cos^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}(b+c) + 8\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-}{4n^2}$$

$$= \frac{(1-\cos a)\{1+\cos(b-c)\} + (1+\cos a)\{1-\cos(b+c)\} + \sin a(\sin b + \sin c}{4n^2}$$

waaruit na eenige herleidingen volgt:

$$(\cot r + \operatorname{tg} R)^2 + 1 = \frac{(\sin a + \sin b + \sin c)^2}{4n^2}.$$

§ 144. Eigenschap. Als δ de spherische afstand van de polen van den om- en ingeschreven cirkel van een boldriehoek zijn, dan is

$$\cos^2\delta = \cos^2(R-r) + \cos^2 R \sin^2 r$$

Bewijs.

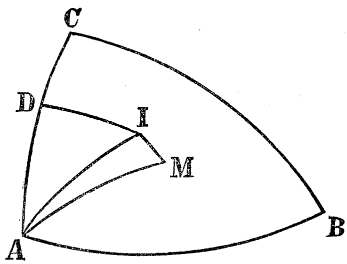


Fig. 70.

In fig. 70 zijn M en I resp. de polen der om- en ingeschreven cirkels. Verbindt men M en I met A, dan is

$$\angle \text{MAD} = S - B,$$
$$\angle \text{IAC} = \tfrac{1}{2}A,$$

dus $\angle \text{MAI} = S - B - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}(C - B)$.

In den driehoek AMI is nu

$$\cos\delta = \cos AM \cos AI + \sin AM \sin AI \cos\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$= \cos R \cos AI + \sin R \sin AI \cos\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Laat men ID loodrecht op AC neer, dan is in den rechthoekigen boldriehoek ADI:

$$\cos AI = \cos r \cos(s-a),$$

$$\sin AI = \frac{\sin r}{\sin\tfrac{1}{2}A}.$$

Daardoor wordt

$$\cos\delta = \cos R \cos r \cos(s-a) + \frac{\sin R \sin r \cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin\tfrac{1}{2}A}.$$

Volgens een formule van Delambre is

$$\frac{\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin\tfrac{1}{2}A} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b+c)}{\sin\tfrac{1}{2}a}.$$

Men verkrijgt dus

$$\cos\delta = \cos R \cos r \cos(s-a) + \frac{\sin R \sin r \sin\tfrac{1}{2}(b+c)}{\sin\tfrac{1}{2}a}.$$

$$\frac{\cos\delta}{\cos R \sin r} = \cot r \cos(s-a) + \frac{\operatorname{tg} R \sin\tfrac{1}{2}(b+c)}{\sin\tfrac{1}{2}a}$$

$$= \frac{\sin s \cos (s - a)}{n} + \frac{2 \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(b + c)}{n}$$

$$= \frac{\sin a + \sin (b + c) + (1 - \cos b) \sin c + (1 - \cos c) \sin b}{2n}$$

$$= \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{2n}.$$

Volgens de vorige paragraaf is nu

$$\frac{\cos^2 \delta}{\cos^2 \mathrm{R} \sin^2 r} = \frac{(\sin a + \sin b + \sin c)^2}{4n^2} = (\cot r + \operatorname{tg} \mathrm{R})^2 + 1,$$

$$\cos^2 \delta = \cos^2 \mathrm{R} \cos^2 r + \sin^2 \mathrm{R} \sin^2 r + 2 \sin \mathrm{R} \cos \mathrm{R} \sin r \cos r + \cos^2 \mathrm{R} \sin^2 r$$
$$= \cos^2 (\mathrm{R} - r) + \cos^2 \mathrm{R} \sin^2 r.$$

§ **145. Eigenschap. Als δ_1 de spherische afstand is van de pool van den omgeschreven cirkel tot de pool van den aangeschreven cirkel rakende aan de zijde a, dan is**

$$\cos^2 \delta_1 = \cos^2 (\mathrm{R} + r_1) + \cos^2 \mathrm{R} \sin^2 r_1.$$

Bewijs.

Zij M de pool van den omgeschreven cirkel, I_a die van den aangeschreven cirkel, dan is

$$\angle \mathrm{MBC} = \mathrm{S} - \mathrm{A},$$
$$\angle \mathrm{I}_a\mathrm{BC} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\mathrm{B},$$

dus $\angle \mathrm{MBI}_a = \mathrm{S} - \mathrm{A} + 90^\circ - \frac{1}{2}\mathrm{B} = 90^\circ - \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{C}).$

Verder is

$$\cos \delta_1 = \cos \mathrm{R} \cos \mathrm{BI}_a + \sin \mathrm{R} \sin \mathrm{BI}_a \sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{C})$$
$$= \cos \mathrm{R} \cos r_1 \cos (s - c) + \frac{\sin \mathrm{R} \sin r_1 \sin \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{C})}{\cos \frac{1}{2}\mathrm{B}}$$
$$= \cos \mathrm{R} \cos r_1 \cos (s - c) + \frac{\sin \mathrm{R} \sin r_1 \sin \frac{1}{2}(a - c)}{\sin \frac{1}{2}b}.$$

$$\frac{\cos \delta_1}{\cos \mathrm{R} \sin r_1} = \cot r_1 \cos (s - c) + \frac{\operatorname{tg} \mathrm{R} \sin \frac{1}{2}(a - c)}{\sin \frac{1}{2}b}$$
$$= \frac{\sin (s - a) \cos (s - c) + 2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(a - c)}{n},$$

of na eenige herleidingen:

$$\frac{\cos^2 \delta_1}{\cos^2 \mathrm{R} \sin^2 r_1} = \frac{(-\sin a + \sin b + \sin c)^2}{4n^2} = (\cot r_1 - \operatorname{tg} \mathrm{R})^2 + 1,$$

waaruit volgt

$$\cos^2 \delta_1 = \cos^2 (\mathrm{R} + r_1) + \cos^2 \mathrm{R} \sin^2 r_1.$$

Eenige eigenschappen van den kleinen cirkel.

§ 146. Eigenschap. Als men door een punt P op een bolopppervlak een veranderlijken grooten cirkel trekt, die een vasten kleinen cirkel op dien bol in A en B snijdt, dan is het product

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}PA \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}PB$$

constant.

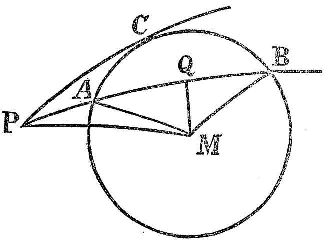


Fig. 71.

Bewijs.

Zij in fig. 71 M de pool van den kleinen cirkel, en MQ $\perp$ PAB. Is a de sperische afstand van P tot M en R de straal van den cirkel, dan is in de rechthoekige boldriehoeken PMQ en AMQ:

$$\cos MQ = \frac{\cos MA}{\cos AQ} = \frac{\cos MP}{\cos PQ},$$

$$\frac{\cos MA - \cos MP}{\cos MA + \cos MP} = \frac{\cos AQ - \cos PQ}{\cos AQ + \cos PQ},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(MP + MA) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(MP - MA) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(PQ + AQ) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(PQ - AQ),$$

$$\text{of } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}PA \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}PB = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + R) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - R) = \text{constant}.$$

Opmerking. De eigenschap blijft doorgaan, als P binnen den cirkel ligt.

Bepaling. *Het standvastige product*

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} PA \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} PB$$

heet de spherische macht *van P ten opzichte van den cirkel MA.*

Opmerking. Als P buiten den kleinen cirkel ligt, en men trekt door P een grooten cirkel, die den kleinen in C raakt, dan is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} PA \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} PB = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} PC.$$

Omgekeerd heeft men:

Als op het verlengde van de zijde BA van boldriehoek ABC een punt P ligt zoodanig, dat

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}PC = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} PA \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} PB,$$

dan raakt de groote cirkel PC aan den omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

Ligt het punt P **op** den cirkel, dan is de macht **nul.** Ligt het punt **binnen** den cirkel dan is de macht **negatief.** Is k de kleinste koorde, die men door dat punt in dien cirkel kan trekken, dan is de macht $-\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} k$.

§ 147. Om het groote belang van de vorige eigenschap volge hier een

Tweede Bewijs.

Zij $\angle \mathrm{MPA} = \varphi$, dan is in den driehoek MAP:

$$\cos \mathrm{AM} = \cos \mathrm{PM} \cos \mathrm{PA} + \sin \mathrm{PM} \sin \mathrm{PA} \cos \varphi, \text{ of}$$
$$\cos \mathrm{R} = \cos a \cos \mathrm{PA} + \sin a \sin \mathrm{PA} \cos \varphi.$$

Stelt men $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{PA} = x$, dan is

$$\cos \mathrm{PA} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin \mathrm{PA} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

waardoor de laatste vergelijking overgaat in

$$\cos \mathrm{R} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cos a + \frac{2x}{1 + x^2} \sin a \cos \varphi,$$

of na herleiding:

$$x^2 (\cos \mathrm{R} + \cos a) - 2x \sin a \cos \varphi + \cos \mathrm{R} - \cos a = 0 \qquad (1).$$

Van deze vierkantsvergelijking is blijkbaar $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{PA}$ een wortel. Welke beteekenis heeft de andere wortel? Het is niet moeilijk in te zien, dat deze $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{PB}$ is, want stelt men $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{PB} = y$, en herhaalt men dit bewijs, dan verkrijgt men de vergelijking

$$y^2 (\cos \mathrm{R} + \cos a) - 2y \sin a \cos \varphi + \cos \mathrm{R} - \cos a = 0,$$

dat is dezelfde als de bovenstaande.

Omdat nu $\operatorname{tg} \frac{1}{2}$ PA en $\operatorname{tg} \frac{1}{2}$ PB de wortels van vergelijking (1) zijn, is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{PA} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{PB} = \frac{\cos \mathrm{R} - \cos a}{\cos \mathrm{R} + \cos a},$$

dus constant.

§ 148. Eigenschap. Als de groote cirkel, die in C aan den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABC raakt, de verlengde basis BA in P snijdt, dan is: $\sin \mathrm{PA} : \sin \mathrm{PB} = \sin^2 \frac{1}{2} \mathrm{CA} : \sin^2 \frac{1}{2} \mathrm{CB}$.

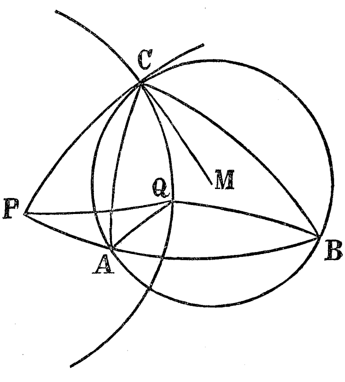


Fig. 72.

Bewijs.

Is (fig. 72) M de pool van den omgeschreven cirkel van driehoek ABC, dan is $\angle \mathrm{MCA} = \mathrm{S} - \mathrm{B}$, $\angle \mathrm{MCB} = \mathrm{S} - \mathrm{A}$, dus $\angle \mathrm{PCA} = 90^\circ - (\mathrm{S} - \mathrm{B})$,

en $\angle \mathrm{PCB} = 90^\circ + (\mathrm{S} - \mathrm{A})$.

In de boldriehoeken PAC en PBC heeft men nu

$$\sin \mathrm{PA} : \sin \mathrm{PC} = \cos (\mathrm{S} - \mathrm{B}) : \sin \mathrm{A},$$
$$\sin \mathrm{PB} : \sin \mathrm{PC} = \cos (\mathrm{S} - \mathrm{A}) : \sin \mathrm{B},$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned}\sin PA : \sin PB &= \cos(S-B)\sin B : \cos(S-A)\sin A\\ &= \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b \sin b : \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a \sin a\\ &= \sin^2 \tfrac{1}{2}b : \sin^2 \tfrac{1}{2}a\\ &= \sin^2 \tfrac{1}{2}CA : \sin^2 \tfrac{1}{2}CB.\end{aligned}$$

Opmerking. Door middel van de eigenschap van § 108 kan men nu bewijzen:

De groote cirkels, die in de hoekpunten van een boldriehoek aan den omgeschreven cirkel van dien driehoek raken, snijden de overstaande zijden in zes punten, die op een grooten cirkel liggen.

§ **149. Eigenschap. Als men** (fig. 72) **uit P als pool met PC als spherischen straal een cirkel op den bol beschrijft, dan is voor elk punt Q van dezen cirkelomtrek**

$$\sin \tfrac{1}{2} QA : \sin \tfrac{1}{2} QB = \sin \tfrac{1}{2} CA : \sin \tfrac{1}{2} CB.$$

Bewijs.

Volgens § 146 heeft men

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} PC = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2} PA\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2} PB,$$

en omdat $PQ = PC$, is ook

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} PQ = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2} PA\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2} PB,$$

zoodat volgens de opmerking van § 146 boog PQ raakt aan den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABQ.

Maar dan hebben wij ook volgens § 148:

$$\sin PA : \sin PB = \sin^2 \tfrac{1}{2} QA : \sin^2 \tfrac{1}{2} QB$$

en daar $\sin PA : \sin PB = \sin^2 \tfrac{1}{2} CA : \sin^2 \tfrac{1}{2} CB$

volgt: $\sin^2 \tfrac{1}{2} QA : \sin^2 \tfrac{1}{2} QB = \sin^2 \tfrac{1}{2} CA : \sin^2 \tfrac{1}{2} CB$ en omdat alle sinussen positief zijn:

$$\sin \tfrac{1}{2} QA : \sin \tfrac{1}{2} QB = \sin \tfrac{1}{2} CA : \sin \tfrac{1}{2} CB.$$

Wij kunnen dus thans zeggen:

De cirkelomtrek, uit P als pool met PC als spherischen straal beschreven, is de meetkundige plaats der punten Q op het bolopppervlak, waarvoor de verhouding

$$\sin \tfrac{1}{2} QA : \sin \tfrac{1}{2} QB$$

standvastig is.

Bepaling. *In overeenstemming met de vlakke meetkunde zullen wij dezen cirkel een* **cirkel van Apollonius** *voor den boldriehoek ABC noemen.*

In § 148 werd reeds opgemerkt, dat de polen der cirkels van

Apollonius op een grooten cirkel liggen. Omtrent de drie cirkels van Apollonius kan men nog opmerken, dat zij elkaar in twee punten S_1 en S_2 van het boloppervlak snijden. De drie bollen van Apollonius voor den koordedriehoek ABC zijn namelijk bollen van eenzelfde coaxaal stelsel: zij snijden elkaar dus volgens een cirkel, die den gegeven bol weer snijdt in de punten S_1 en S_2. Voor deze punten gelden de betrekkingen

$$\sin \tfrac{1}{2}S_1A : \sin \tfrac{1}{2}S_1B : \sin \tfrac{1}{2}S_1C = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}a} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}b} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}c},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}S_2A : \sin \tfrac{1}{2}S_2B : \sin \tfrac{1}{2}S_2C = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}a} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}b} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}c}.$$

§ **150.** Uit de eigenschappen van de vorige paragraaf volgt onmiddellijk de

Eigenschap. Als A en B twee vaste punten op een bol zijn, dan is de meetkundige plaats der punten C op dien bol, waarvoor

$$\cos \tfrac{1}{2}\,CA : \cos \tfrac{1}{2}\,CB$$

constant is, een kleine cirkel.

Bewijs.

Is C' het tegenpunt van C (fig. 73), dan is

$$\cos \tfrac{1}{2}\,CA = \sin \tfrac{1}{2}\,C'A \text{ en } \cos \tfrac{1}{2}\,CB = \sin \tfrac{1}{2}\,C'B,$$

zoodat ook de verhouding

$$\sin \tfrac{1}{2}\,C'A : \sin \tfrac{1}{2}\,C'B$$

standvastig is. De m. p. van C' is volgens § 149 een kleine cirkel, die van C is dus de *tegencirkel* (§ 20) daarvan.

Aan deze eigenschap kan nog de volgende belangrijke opmerking vastgeknoopt worden.

Is C' in fig. 73 het tegenpunt van C, dan vindt men de m. p. van C' door in C' aan den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC' een raakboog $C'P'$ te trekken, en uit P' als pool met $P'C'$ als straal den kleinen cirkel $C'DF$ te beschrijven. Omdat C steeds het tegenpunt van C' blijft, is de m.p. van C ook een cirkel CE, evenwijdig met het vlak

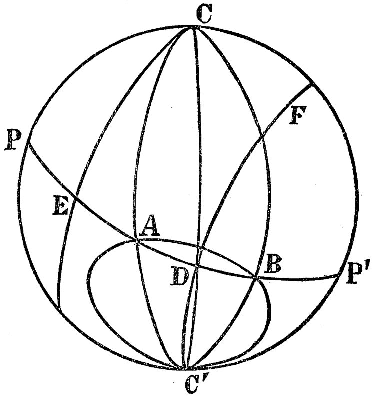


Fig. 73.

van $C'DF$, waarvan de tegenpunten P en P' de polen zijn, en waarvan de spherische straal PC gelijk is aan dien van cirkel $C'DF$, (zij zijn dus tegencirkels van elkaar).

De bovenbedoelde opmerking is nu deze:

De kleine cirkel CE is ook de m.p. der punten C, waarvoor de oppervlakken der boldriehoeken ACD en BCD even groot zijn. (Tot die m. p. behoort ook de groote cirkel AB.)

Bewijs.

Verbind C en D door een grooten cirkel en noem de spherische excessen van de driehoeken ACD en BCD resp. E_1 en E_2, de sinussen van diezelfde driehoeken $2n_1$ en $2n_2$. Volgens de formule van Cagnoli is

$$\sin \tfrac{1}{2} E_1 = \frac{n_1}{2 \cos \frac{1}{2} AC \cos \frac{1}{2} AD \cos \frac{1}{2} CD},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} E_2 = \frac{n_2}{2 \cos \frac{1}{2} BC \cos \frac{1}{2} BD \cos \frac{1}{2} CD},$$

$$\text{dus } \frac{\sin \frac{1}{2} E_1}{\sin \frac{1}{2} E_2} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{\cos \frac{1}{2} BC \cos \frac{1}{2} BD}{\cos \frac{1}{2} AC \cos \frac{1}{2} AD}.$$

Omdat ook

$$n_1 : n_2 = \sin AD : \sin BD, \text{ wordt}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} E_1}{\sin \frac{1}{2} E_2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} AD \cos \frac{1}{2} AD}{2 \sin \frac{1}{2} BD \cos \frac{1}{2} BD} \times \frac{\cos \frac{1}{2} BC \cos \frac{1}{2} BD}{\cos \frac{1}{2} AC \cos \frac{1}{2} AD}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} AD \cos \frac{1}{2} BC}{\sin \frac{1}{2} BD \cos \frac{1}{2} AC} = \frac{\sin \frac{1}{2} AD}{\sin \frac{1}{2} BD} \times \frac{\sin \frac{1}{2} BD}{\sin \frac{1}{2} AD} = 1.$$

Hieruit volgt:

$$\sin \tfrac{1}{2} E_1 = \sin \tfrac{1}{2} E_2, \text{ dus}$$

$$E_1 = E_2, \text{ òf } E_1 + E_2 = 360^\circ.$$

Dit laatste is niet mogelijk, omdat dan het spherisch exces van $\triangle$ ABC 360° zou zijn. De boldriehoeken ACD en BCD hebben dus dezelfde oppervlakte.

Voorbeelden van oplossing.

§ 151. A. *In elken boldriehoek is*

$$2 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b = tg\, R \cos \tfrac{1}{2}c \sin h_c.$$

Bewijs.

Omdat
$$\operatorname{tg} R = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{n},$$

$$\sin h_c = \frac{2n}{\sin c},$$

is $$\operatorname{tg} R \cos \tfrac{1}{2}c \sin h_c = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{n} \times \cos \tfrac{1}{2}c \times \frac{2n}{\sin c}$$

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b.$$

B. *In de punten A en B, op een kleinen cirkel gelegen, trekt men groote cirkels, die den kleinen raken. Uit een willekeurig punt P op den kleinen cirkel laat men loodrechte bogen PD en PE neer op de raaklijnen, en een loodrechten boog PF op den grooten cirkel AB. Bewijs dat* $\dfrac{\sin PD \sin PE}{\sin^2 PF}$ *constant is.*

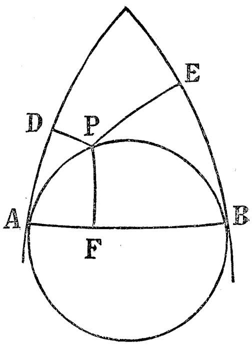


Fig. 74.

Bewijs.

Is R de straal van den cirkel, dan is volgens de voorgaande eigenschap:

$2 \sin \frac{1}{2}PA \sin \frac{1}{2}PB = \operatorname{tg} R \cos \frac{1}{2}AB \sin PF.$ (1)

Beschouwt men de beide in A tot één raakpunt samengevallen punten als hoekpunten van een boldriehoek, waarvan P het derde hoekpunt is, dan is PD een hoogtelijn van dien boldriehoek, en de zijde, waarop die hoogtelijn staat, is nul.

Men heeft dus volgens de voorgaande eigenschap:

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}PA = \operatorname{tg} R \sin PD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en evenzoo $$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}PB = \operatorname{tg} R \sin PE \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Deelt men het produkt van (2) en (3) door het vierkant van (1), dan komt er

$$\frac{\sin PD \sin PE}{\cos^2 \frac{1}{2}AB \sin^2 PF} = 1,$$

of $$\frac{\sin PD \sin PE}{\sin^2 PF} = \cos^2 \tfrac{1}{2}AB,$$

dus constant.

§ 152. Vraagstukken.

1. Gegeven:

1e $a = 40°20'15''$, $b = 50°16'36''$, $c = 58°23'34''$. Bepaal R en r.
2e $A = 60°24'32''$, $B = 72°15'22''$, $C = 83°15'16''$. Bepaal R en r.
3e $A = 65°13'$, $B = 50°34'$, $C = 90°$. Bepaal R en r.
4e $a = b$, $C = 60°$, $r = 30°$. Bepaal de onbekende elementen.
5e $a = 139°21'22''$, $b = 126°57'22'$, $C = 80°$. Bepaal r.

6e $b = 50°$, $c = 80°$, $R = 60°$. Bepaal a.

7e $B = 75°30'30''$, $C = 84°17'40''$, $r = 32°$. Bepaal a.

2. Gegeven:

1e $a = b = c =$ boog cos $\frac{1}{4}$. Bepaal R,

2e $A = B = C = 72°$. Bepaal R, r, r_1.

3e $a = b = c$. $R = 60°$. Bepaal a, A.

4e $a = 40°$, $b = 50°$, $c = 60°$. Straal bol $= 8$ cM. Bepaal R in cM.

5e $C = 90°$, $c = 75°$, $r = 30°$. Bepaal a en b.

6e $B = 60°24'$, $C = 80°50'$, $r = 30°$. Bepaal a, b en c.

7e $R = 60°$, $c = 60°$, $C = 45°$. Bepaal a en b.

3. Bepaal r en den spherischen afstand van de pool van den ingeschreven cirkel tot het hoekpunt C, als gegeven zijn:

1e $a = 54°18'25''$, $b = 69°13'15''$, $c = 48°12'10''$.
(Adsp. Landm. 1905).

2e $a = 50°$, $b = 70°$, $C = 48°$.

4. Van een gelijkzijdigen boldriehoek zijn de hoeken elk 108°. Bereken den spherischen afstand van de pool van den ingeschreven cirkel tot die van den ingeschreven cirkel van een der nevendriehoeken. (Toel. Univ. 1907).

5. In den boldriehoek ABC is M de pool van den omgeschreven cirkel. Men verbindt M met B en C door bogen van groote cirkels. Bereken $\angle$ BMC, als gegeven is:
$a = 82°11'20''$, $b = 64°19'20''$, $c = 31°31'30''$. (Adsp. Landm. 1912).

6. Gegeven:

1e $A + B = 125°$, $C = 90°$, $a = 48°$. Bepaal b en c.

2e $a = 100°12'$, $b = 60°48'$, $C = A + B$. Bepaal C en R.

3e $A + B = 180°$, C 90°, $r = 15°$. Bepaal a, b, c.

4e $A + B = 180°$, $C = 90°$, $R = 60°$. Bepaal a, b, c.

5e $s = 150°$, $A = 30°$, $r = 15°$. Bepaal B. C.

6e $S = 180°$, $b = 164°14'30''$, $R = 82°39'58''$. Bepaal a en c.
(Toel. Univ. 1908).

7e $A + B = 198°48'51''$, $C = 90°$, $R = 71°44'54''$. Bereken $a + b$.
(Toel. Univ. 1911).

8e $A = 70°20'40''$, $a = 33°1'35''$, $b + c = 302°10'30''$.
Bepaal R. (Toel. Univ. 1909).

9e $A = 60°$, $a = 45°$, $b + c = 225°$. Bepaal r.

7. Men teekent een boldriehoek met zijn in- en aangeschreven cirkels. Druk de spherische afstanden der raakpunten, die op eenzelfde zijde van den driehoek liggen, uit in de zijden van den boldriehoek.

8. Van een rechthoekigen boldriehoek is een rechthoekszijde 150°, en de spherische middellijn van den ingeschreven cirkel is een kwadrant. Bereken de onbekende elementen van dien driehoek.
9. Van een rechthoekigen gelijkbeenigen boldriehoek zijn de schuine zijde en een rechthoekszijde elkaars complement. Bereken R en r.
10. In een gelijkzijdigen boldriehoek met hoeken van 120° zijn drie gelijke kleine cirkels zoodanig beschreven, dat elk hunner aan de beide andere en aan twee zijden van den driehoek raakt. Bewijs, dat de stralen van deze cirkels 30°, en dat hun middelpunten polen der zijden van den gegeven driehoek zijn.
(Ex. Wisk. K_I 1909).
11. Van boldriehoek ABC is $a = 50°$, $b = 60°$, $c = 70°$. Men construeert een kleinen cirkel door A en B, die AC raakt en BC in B en E snijdt. Bereken EB en EA (§ 146).
12. In een gelijkzijdigen boldriehoek is
1e $\operatorname{tg} R = 2 \operatorname{tg} r$.
2e $\sin (R - r) = \cos R \sin r$.
3e $\cos^2 R \sin^2 r + \cos^2 (R - r) = 1$.
13. Als in een rechthoekigen boldriehoek ($C = 90°$) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 2$, dan is $r = \dfrac{\pi}{4}$.
14. Als $b + c = \pi$, dan is
1e $\operatorname{tg} r = \cos \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}A$,
2e $\operatorname{tg} R = \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$.
(Adsp. Landm. 1904).
15. Van een boldriehoek ABC is $C = A + B$. Bewijs:
1e De pool van den omgeschreven cirkel ligt op het midden van AB.
2e $\sin h_c = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}{\sin \frac{1}{2}c}$. (§ 151).
3e $\cos^2 \frac{1}{2}c = \cot A \cot B$.
4e Als CD een hoogtelijn is, dan is $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}CD = \operatorname{tg} \frac{1}{2}AD \operatorname{tg} \frac{1}{2}BD$ (§ 146).
5e Als P en Q de middens van BC en AC zijn, dan is
$$\cos PQ = \frac{\cot A \cot B}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}.$$
16. Van een boldriehoek ABC is $A + B + C = 2\pi$. Bewijs
1e De polen der omgeschreven cirkels van de nevendriehoeken liggen op de middens der zijden. (§ 43, n°. 22).
2e $\cot R = \cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b \cot \frac{1}{2}c$.
3e $\operatorname{tg}^2 R + \sec A \sec B \sec C = 0$.
17. In een rechtzijdigen boldriehoek ($c = 90°$) is

$$\operatorname{tg} r = \frac{1}{2 \sin s} \sqrt{-\cos(a+b)\cos(a-b)}.$$

(Toel. Univ. 1911).

18. Als de som der rechthoekszijden van een rechthoekigen boldriehoek 180° is, dan is $\operatorname{tg} r = \cos \frac{1}{2}c$.

19. Van een boldriehoek ABC is $a + b - c = \pi$. De ingeschreven cirkel raakt CB en CA in P en Q. Bewijs
 1e $C = 2r$.
 2e C is een pool van den cirkel door P en Q.

20. Als het hoekpunt C van boldriehoek ABC een pool van AB is, dan is $\operatorname{tg} R = \sec \frac{1}{2}c$ en $\operatorname{tg} r = \sin \frac{1}{2}C$.

21. Op den omtrek van een kleinen cirkel, waarvan de spherische straal 60° is, neemt men een punt A. De groote cirkel, waarvan A een pool is, snijdt den kleinen cirkel in B en C. Bereken den spherischen afstand van B en C.

22. Van den boldriehoek ABC is I de pool van den ingeschreven cirkel. Als $a + b + c = \pi$, dan is
$$\cos AI : \cos BI : \cos CI = \sin a : \sin b : \sin c.$$

23. Van een boldriehoek ABC is de basis AB constant in ligging en grootte, terwijl de omtrek 180° is. Bepaal de m. p. van de polen der aangeschreven cirkels rakende aan de opstaande zijden.

24. Van den gelijkzijdigen boldriehoek ABC zijn D, E en F de middens van BC, CA en AB. R en R′ zijn de stralen der omgeschreven cirkels van ABC en DEF, r en r' de stralen der ingeschreven cirkels van dezelfde driehoeken; r_a is de straal van den ingeschreven cirkel van AFE. Bewijs
 1e $\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{tg} R'} = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}A$.
 2e $\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r'} = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}A$.
 3e Als $BC = CA = AB = 90°$, dan is
$$\operatorname{tg} r' = \tfrac{1}{2} \sin 45°, \quad \operatorname{tg} r_a = \sin 15°.$$

25. Als x_1, x_2 en x_3 de spherische afstanden van de pool van den omgeschreven cirkel tot BC, CA en AB zijn, dan is
$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \sin(S - A) : \sin(S - B) : \sin(S - C)$.
$\cos x_1 : \cos x_2 : \cos x_3 = \sec \frac{1}{2}a : \sec \frac{1}{2}b : \sec \frac{1}{2}c$.

26. Als I de pool van den ingeschreven cirkel is, dan is
$$\frac{\sin BIC}{\sin AI} : \frac{\sin CIA}{\sin BI} : \frac{\sin AIB}{\sin CI} = \sin a : \sin b : \sin c.$$

27. M is de pool van den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABC. Men verlengt den spherischen straal CM tot hij den omgeschreven cirkel in Q snijdt. Bewijs, dat

$$\cos AQ = 2\cos^2 R - \cos b$$
$$\cos BQ = 2\cos^2 R - \cos a. \quad (\S\ 102).$$

28. Van een rechthoekigen boldriehoek ABC ($C = 90°$) is I de pool van den ingeschreven cirkel. Bewijs dat

$$\frac{\sin AI \sin BI}{\sin CI} = \cos r \sin c.$$

29. In den boldriehoek ABC is AD een mediaan, en O de pool van den omgeschreven cirkel. Men trekt door O den grooten cirkel loodrecht op AD. Bewijs, dat voor elk punt M van dezen cikel $\cos MB + \cos MC = 2\cos MA$ is.

30. M is de pool van den cirkel beschreven om den gelijkzijdigen boldriehoek ABC, en P is een punt op den bol. Bewijs, dat

$$\cos AP + \cos BP + \cos CP = 3\cos PM \cos R.$$

(Acte-ex. Wisk. K_I, 1910).

31. Als $R = 45°$, dan is $2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b = \cos\frac{1}{2}c \sin h_c$.

32. Bewijs

1e $2\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B = \cot r \sin\frac{1}{2}C \sin h_c$.

2e Als $r = 45°$ is, dan is $2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B = \sin\frac{1}{2}C \sin h_c$.

33. Bewijs

1e $\operatorname{tg} R = \dfrac{\sqrt{\{\sin^2\frac{1}{2}(a-b) + \sin a \sin b \sin^2\frac{1}{2}C\}}}{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \sin C}$.

2e $\operatorname{tg} r = \dfrac{\sin c \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B}{\sqrt{\{\sin^2\frac{1}{2}(A-B) + \sin A \sin B \cos^2\frac{1}{2}c\}}}$.

3e $\operatorname{tg} R \sin\frac{1}{2}E = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a \operatorname{tg}\frac{1}{2}b \operatorname{tg}\frac{1}{2}c$.

4e $\operatorname{tg} r = \sin s \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}B \operatorname{tg}\frac{1}{2}C$.

5e $\operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3 = \operatorname{tg} r \sin^2 s$.

6e $\operatorname{tg} R_1 \operatorname{tg} R_2 \operatorname{tg} R_3 = \operatorname{tg} R \sec^2 S$.

34. Bewijs

1e $\operatorname{tg} R + \cot r = \operatorname{tg} R_1 + \cot r_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} R + \operatorname{tg} R_1 + \operatorname{tg} R_2 + R_3)$
$= \frac{1}{2}(\cot r + \cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3)$.

2e $\operatorname{tg}^2 R + \operatorname{tg}^2 R_1 + \operatorname{tg}^2 R_2 + \operatorname{tg}^2 R_3 = \cot^2 r + \cot^2 r_1 + \cot^2 r_2 + \cot^2 r_3$.

3e $\dfrac{\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r}{\cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3 - \cot \mathrm{r}} = \dfrac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2}$.

4e $\cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3 - \cot r = 2\operatorname{tg} R$.

5e $\operatorname{tg} R_1 + \operatorname{tg} R_2 + \operatorname{tg} R_3 - \operatorname{tg} R = 2\cot r$.

6e $\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3 = n^2$.

7e $\cot R \cot R_1 \cot R_2 \cot R_3 = N^2$.

35. Als $A + B + C = 2\pi$ is, dan is
$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3.$$

36. De groote cirkel door de raakpunten van den ingeschreven cirkel op de zijden AC en BC snijdt de verlengde basis in D; de groote cirkel door de raakpunten van de aangeschreven cirkels op de zijden AC en BC snijdt de verlengde basis in E. Bewijs dat
$$\sin DA : \sin DB = \sin (s - a) : \sin (s - b).$$
$$\sin EA : \sin EB = \sin (s - b) : \sin (s - a). \quad (\S\ 108).$$

37. Van een driehoek ABC, rechthoekig in C en waarvan AC en $BC < 90^\circ$ zijn, is D de projectie van C op AB. Men verlengt AC met een boog $CC' = AC$, AB met $BB' = AB$ en AD met $DD' = AD$. Bewijs, dat de omgeschreven cirkel van $\triangle B'C'D'$ raakt aan CC'. (§ 146).

38. Om een gelijkzijdigen boldriehoek ABC met een zijde van 60° teekent men den omgeschreven cirkel. De hoogtelijn uit B snijdt den omgeschreven cirkel in D. Bewijs, dat $\cos AD = \frac{5}{6}$ is.

39. Als de bissectrix van $\angle C$ den omgeschreven cirkel voor de tweede maal in D snijdt, dan is
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}CD = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}C}.$$

40. Als men uit een veranderlijk punt P op den vasten grooten cirkel PM de spherische raaklijnen PA en PB aan een gegeven kleinen cirkel trekt, dan is $\operatorname{tg} \frac{1}{2} MPA \cot \frac{1}{2} MPB$ constant.

41. Men beschouwt alle boldriehoeken ABC beschreven in een kleinen cirkel met het spherisch middelpunt O, denzelfden top A hebbende en voldoende aan de voorwaarde:
$$\cos b + \cos c = k \quad (k \text{ een constante}).$$
De meetkundige plaats van het midden M van de zijde BC is een boog van een grooten cirkel rechthoekig op AO.

(Visschers Mathesis 1914).

42. Als I de pool van den ingeschreven cirkel is, dan is
$$\frac{\cos IA}{\sin h_a} + \frac{\cos IB}{\sin h_b} + \frac{\cos IC}{\sin h_c} = \operatorname{cosec} r. \quad (\S\ 101).$$

43. Als x_1, x_2, x_3 de spherische afstanden van de pool van den omgeschreven cirkel tot de zijden BC, CA en AB zijn, dan is
$$\frac{\sin x_1}{\sin h_a} + \frac{\sin x_2}{\sin h_b} + \frac{\sin x_3}{\sin h_c} = \sec R. \quad (\S\ 101).$$

44. M is de pool van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC. Een groote cirkel loodrecht op CM snijdt AC in D en BC in E. Bewijs, dat $\operatorname{tg} CE : \operatorname{tg} CD = \operatorname{tg} \frac{1}{2}b : \operatorname{tg} \frac{1}{2}a$.

Men neemt verder op CA een punt F zoo, dat DF = CD en op CB een punt G zoo, dat EG = CE is. Bewijs, dat A, B, F en G op een kleinen cirkel liggen. (§ 146).

45. Uit een punt van den omgeschreven cirkel van een boldriehoek laat men spherische loodlijnen op de zijden en op de raaklijnen in de hoekpunten op den driehoek neer. Bewijs, dat het product van de sinussen der loodlijnen op de zijden en het product van de sinussen der loodlijnen op de raaklijnen een constante verhouding hebben. (§ 151).

46. De groote cirkel, die in C aan den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABC raakt, snijdt het verlengde van BA in P. AE en BF worden loodrecht op PC getrokken. De kleine cirkel uit P als pool en PC als straal snijdt AB in D. E_1 en E_2 zijn de spherische excessen der driehoeken ACD en BCD. Bewijs

1ᵉ $\sin PA : \sin PB = (1 - \cos b) : (1 - \cos a)$.

2ᵉ $$\operatorname{tg} PA = \frac{(1 - \cos b) \sin c}{1 - \cos a - \cos c + \cos b \cos c}.$$

3ᵉ $$\cot PA + \cot PB = \frac{(\cos a - \cos b)(\cos a + \cos b - 2)}{(1 - \cos a)(1 - \cos b) \sin c}.$$

4ᵉ $\sin AE : \sin BF = \sin^2 \frac{1}{2}b : \sin^2 \frac{1}{2}a$.

5ᵉ $\sin \frac{1}{2}E_1 : \sin \frac{1}{2}E_2 = \cot \frac{1}{2}a : \cot \frac{1}{2}b$.

6ᵉ $\operatorname{tg} \frac{1}{4}(E_1 - E_2) = \operatorname{tg} \frac{1}{4}E \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - A) \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$.

47. De groote cirkels, die in A en B aan den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC raken, snijden elkaar in D. E is het snijpunt van AB en CD. Bewijs

1ᵉ $\cot AD = \cot BD = \sin (S - C) \cot \frac{1}{2}c$.

2ᵉ $\sin AE : \sin BE = \sin^2 \frac{1}{2}b : \sin^2 \frac{1}{2}a$.

48. Als ρ_1, ρ_2 en ρ_3 de spherische stralen der cirkels van Apollonius zijn (§ 149), dan is

$$\operatorname{tg} \rho_1 = \pm \frac{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\cos a - \cos b}, \quad \operatorname{tg} \rho_2 = \text{enz.}$$

49. De groote cirkels, die een hoekpunt verbinden met het raakpunt van den ingeschreven cirkel op de overstaande zijde, gaan door één punt. (Punt van Gergonne). Bewijs dit. Voor dit punt is

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \frac{1}{1 + \cos A} : \frac{1}{1 + \cos B} : \frac{1}{1 + \cos C}.$$

50. De groote cirkels, die een hoekpunt verbinden met het raakpunt van den aangeschreven cirkel op de overstaande zijde, gaan door één punt. (Punt van Nagel; isoperimetrisch punt). Bewijs dit.

Voor dit punt is

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \frac{1}{1-\cos A} : \frac{1}{1-\cos B} : \frac{1}{1-\cos C}.$$

51. Als δ de spherische afstand is van de polen der om- en ingeschreven cirkels, dan is

$$\frac{\cos\delta}{\sin R \sin r} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{4\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}.$$

52. De middelloodlijn van de basis AB wordt door binnen- en buitenbissectrix van den tophoek C in E en F gesneden. Bewijs, dat

$$\operatorname{tg} EF = \frac{2\sin\frac{1}{2}c}{\sin(A+B)\cos^2\frac{1}{2}C}.$$

53. Men beschouwt alle boldriehoeken ABC, waarvan de hoek A is gegeven in ligging en grootte en $\operatorname{tg}\frac{1}{2}b + \operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ constant is. Bewijs, dat de omgeschreven cirkel steeds door een 2[de] vast punt gaat. (Visschers, Mathesis 1914).

VII. BOLVEELHOEKEN. MEETKUNDIGE PLAATSEN.

§ 153. In § 41 is gebleken, dat de stereographische projectie van een boldriehoek een figuur is, die begrensd wordt door twee rechte lijnen en een cirkelboog, als het tegenpunt van een der hoekpunten als projectiecentrum wordt aangenomen. In deze onderstelling zullen wij de zijden van de projectie uitdrukken in elementen van den gegeven boldriehoek.

§ 154. Berekening van de zijden van de stereographische projectie van een boldriehoek.

Is in fig. 75 O het tegenpunt van het hoekpunt A van boldriehoek ABC, dan is abc de projectie. Zij R de straal van den bol. Uit den rechthoekigen driehoek Oab volgt onmiddellijk

$$\boldsymbol{ab = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c}.$$

Evenzoo is

$$\boldsymbol{ac = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b}.$$

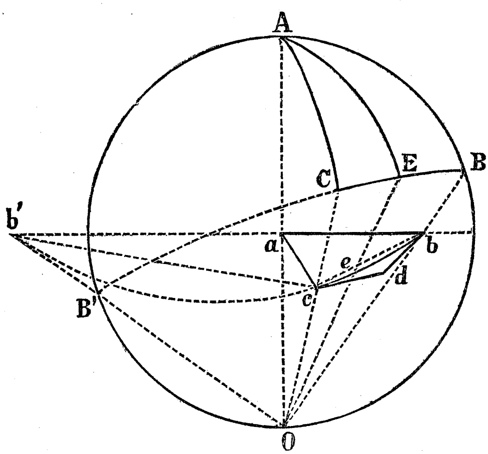


Fig. 75.

Ter berekening van de koorde bc heeft men in den rechtlijnigen driehoek abc:

$$bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \times ac \cos \mathrm{A}$$

$$= \mathrm{R}^2 \{\mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}b + \mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}c - 2\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}b\;\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}c \cos \mathrm{A}\}$$

$$= \frac{\mathrm{R}^2}{4\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}\{(1-\cos b)(1+\cos c)+(1+\cos b)(1-\cos c)-2\sin b \sin c \cos \mathrm{A}\}$$

$$= \frac{\mathrm{R}^2}{2\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}(1 - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \mathrm{A})$$

$$= \frac{\mathrm{R}^2(1-\cos a)}{2\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c} = \frac{\mathrm{R}^2\sin^2\frac{1}{2}a}{\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c},$$

zoodat $$\boldsymbol{bc = \frac{\mathrm{R}\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}$$ is.

Is b' de stereographische projectie van B', dan is de figuur, ingesloten door de rechten ac en ab' en door den cirkelboog $b'c$ de projectie van den nevendriehoek AB'C. In den driehoek Oab' is nu

$$ab' = \mathrm{R}\ \mathrm{tg}\ a\ \mathrm{O}b' = \mathbf{R\ cot}\ \tfrac{1}{2}c.$$

Verder vindt men uit den rechtlijnigen driehoek $ab'c$, evenals boven:

$$b'c = \frac{\mathbf{R\ cos}\ \frac{1}{2}a}{\mathbf{cos}\ \frac{1}{2}b\ \mathbf{sin}\ \frac{1}{2}c}.$$

§ 155. Bepaling van het spherisch exces van een bolvierhoek, als de zijden en de diagonalen gegeven zijn.

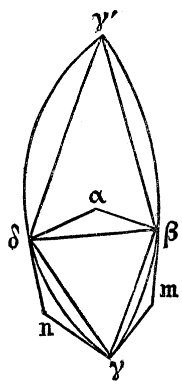


Fig. 76.

Neemt men het tegenpunt van hoekpunt A van bolvierhoek ABCD als centrum van stereographische projectie aan, dan is die projectie een figuur, ingesloten door twee rechten $\alpha\beta$ en $\alpha\delta$ (fig 76), en twee cirkelbogen $\beta\gamma$ en $\delta\gamma$. Trekt men in β, γ en δ raaklijnen aan deze bogen, die elkaar in m en n snijden, dan is, als E het sperisch exces van den bolvierhoek is,

$$\mathrm{E} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} - 360^\circ$$
$$= \text{boog } \beta\gamma + \text{boog } \delta\gamma = 2 \angle \beta\gamma'\delta,$$

of $\frac{1}{4}\mathrm{E} = \frac{1}{2} \angle \beta\gamma'\delta$.

Hierin is γ' het tweede snijpunt der bogen $\beta\gamma$ en $\delta\gamma$. In den vlakken driehoek $\beta\gamma'\delta$ is nu

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\delta'\gamma = \frac{(\beta\delta + \beta\gamma' - \delta\gamma')(\beta\delta - \beta\gamma' + \delta\gamma')}{4\,\beta\gamma' \times \delta\gamma'}.$$

Is nu van den bolvierhoek ABCD gegeven:

$$\mathrm{AB} = a,\ \mathrm{BC} = b,\ \mathrm{CD} = c,\ \mathrm{DA} = d,\ \mathrm{AC} = f,\ \mathrm{BD} = g,$$

dan is volgens de voorgaande paragraaf:

$$\beta\delta = \frac{\mathrm{R}\sin\frac{1}{2}g}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d},\quad \beta\gamma' = \frac{\mathrm{R}\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}f},\quad \delta\gamma' = \frac{\mathrm{R}\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}f}.$$

Substitueert men deze waarden in de formule voor $\sin^2 \beta\gamma'\delta$, dan komt er

$$\mathbf{sin}^2\,\tfrac{1}{4}\mathbf{E} = \frac{(\mathbf{sin}\,\frac{1}{2}g\ \mathbf{sin}\,\frac{1}{2}f + \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}b\ \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}d - \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}a\ \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}c)(\mathbf{sin}\,\frac{1}{2}g\ \mathbf{sin}\,\frac{1}{2}f - \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}b\ \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}d + \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}a\ \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}c)}{\mathbf{4\ cos}\,\frac{1}{2}a\ \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}b\ \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}c\ \mathbf{cos}\,\frac{1}{2}d}$$

Opmerking. Laat men d tot nul naderen, dan wordt $f = c$ en $g = a$. Bovenstaande formule gaat dan over in

$$\sin^2\tfrac{1}{4}\mathrm{E} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}c - (\cos\frac{1}{2}b - \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c)^2}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2}a - \cos^2 \frac{1}{2}b - \cos^2 \frac{1}{2}c + 2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

Dit is een bekende formule voor het spherisch exces van een boldriehoek. (§ 128.)

§ **156. Eigenschap. Het product van de sinussen der halve diagonalen van een bolkoordenvierhoek is gelijk aan de som der producten van de sinussen der halve overstaande zijden.**

Bewijs.

Zij in fig. 77 ABCD een bolkoorden vierhoek. Stel AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, AC $= f$, BD $= g$, dan moet bewezen worden, dat

$$\sin \tfrac{1}{2}f \sin \tfrac{1}{2}g =$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}c + \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}d.$$

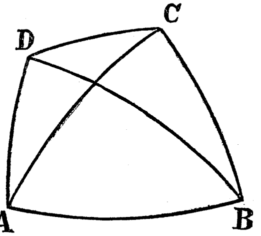


Fig. 77.

Verbindt men A, B, C en D door rechte lijnen, dan ontstaat een vlakke koordenvierhoek; stelt men de koorden AB, BC, ... BD voor door a', b', ... g', dan is volgens het theorema van Ptolemaeus uit de vlakke meetkunde

$$f'g' = a'c' + b'd',$$
$$\tfrac{1}{2}f' \times \tfrac{1}{2}g' = \tfrac{1}{2}a' \times \tfrac{1}{2}c' + \tfrac{1}{2}b' \times \tfrac{1}{2}d'.$$

Is R de straal van den bol, dan heeft men

$$\tfrac{1}{2}a' = \mathrm{R} \sin \tfrac{1}{2}a; \ \tfrac{1}{2}b' = \mathrm{R} \sin \tfrac{1}{2}b, \text{ enz.},$$

waardoor de laatste vergelijking, na deeling door R^2, overgaat in

$$\sin \tfrac{1}{2}f \sin \tfrac{1}{2}g = \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}c + \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}d.$$

Opmerking. Wegens de overeenkomst van deze eigenschap met het theorema van Ptolemaeus uit de vlakke meetkunde zullen wij haar noemen *de stelling van Ptolemaeus voor den bol.*

§ **157.** Met dezelfde gegevens van de voorgaande paragraaf heeft men de

Eigenschap. In een bolkoordenvierhoek is

$$\frac{\sin \frac{1}{2}f}{\sin \frac{1}{2}g} = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}d + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d}.$$

Het bewijs volgt onmiddellijk uit de bekende stelling van den vlakken koordenvierhoek ABCD, dat

$$\frac{f'}{g'} = \frac{a'd' + b'c'}{a'b' + c'd'}.$$

Opmerking. De eigenschappen van § 156 en 157 stellen ons in staat, de diagonalen van een bolkoordenvierhoek te berekenen, als de zijden daarvan gegeven zijn.

§ 158. Het spherisch exces van een bolkoordenvierhoek in de zijden uit te drukken.

Substitueert men in de in § 155 gevonden formule voor $\sin^2 \frac{1}{4}E$ de waarde van $\sin \frac{1}{2}f \sin \frac{1}{2}g$, in § 156 gevonden, dan is voor een bolkoordenvierhoek

$$\sin^2 \tfrac{1}{4}E = \frac{\{\cos \frac{1}{2}(b-d) - \cos \frac{1}{2}(a+c)\}\{\cos \frac{1}{2}(a-c) - \cos \frac{1}{2}(b+d)\}}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d)\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}.$$

Stelt men $a + b + c + d = 2s$, dan gaat de formule over in

$$\boldsymbol{\sin^2 \tfrac{1}{4}E = \frac{\sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c) \sin \frac{1}{2}(s-d)}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}}.$$

Opmerkingen. 1. Uit de eerste formule van deze paragraaf kan men nog afleiden, dat voor een bolkoordenvierhoek

$$\cos \tfrac{1}{2}E = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + \cos d - 4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d} \text{ is.}$$

Waarin gaat deze formule over voor $d = o$?

2. Is een bolkoordenvierhoek tevens bolraaklijnenvierhoek, dan is

$$a + c = b + d,$$

$$s - a = \frac{-a + b + c + d}{2} = c, \text{ enz.,}$$

waardoor men voor een dergelijken bolvierhoek krijgt

$$\sin^2 \tfrac{1}{4}E = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}d.$$

§ 159. Bepaling. *Een* **regelmatige bolveelhoek** *is een bolveelhoek, waarvan de zijden, en ook de hoeken even groot zijn.*

Evenals in de vlakke meetkunde heeft men:

Om en in elken regelmatigen bolveelhoek kan men een cirkel beschrijven.

Omdat de hoek, die ontstaat door verbinding van twee opeenvolgende hoekpunten van een regelmatigen bol-n-hoek met de pool van den omgeschreven cirkel, gelijk aan is $\frac{2\pi}{n}$, kan men in een gegeven kleinen cirkel op een bol een regelmatigen bol-n-hoek construeeren, als het mogelijk is, met passer en liniaal een vlakken regelmatigen n-hoek te construeeren.

Daar men in een bol slechts vijf regelmatige veelvlakken kan beschrijven, is het slechts op vijf wijzen mogelijk, een boloppervlak in congruente regelmatige bolveelhoeken te verdeelen, waarvan in ieder hoekpunt hetzelfde aantal samenkomen.

Brengt men door het middelpunt van een regelmatig veelvlak en elk der ribben een vlak, dan wordt het omgeschreven bolopppervlak verdeeld in regelmatige bolveelhoeken. Men kan aldus verkrijgen:

4 driehoeken met zijden gelijk aan boog cos $(-\frac{1}{3})$.

6 vierhoeken „ „ „ „ boog cos $\frac{1}{3}$.

8 driehoeken „ „ „ „ $\frac{\pi}{2}$.

12 vijfhoeken „ „ „ „ boog sin $\frac{2}{3}\left(<\frac{\pi}{2}\right)$.

20 driehoeken „ „ „ „ boog tg 2.

Meetkundige plaatsen.

§ **160.** In de vorige hoofdstukken zijn reeds eenige m. p. gevonden. De voornaamste zijn:

1. De m. p. der punten, waarvan de spherische afstanden tot twee gegeven punten A en B gelijk zijn, is de groote cirkel, die den boog AB loodrecht middendoor deelt. (§ 17).

2. De m. p. der punten, wier spherische afstanden tot twee gegeven groote cirkels gelijk zijn, bestaat uit twee groote cirkels; die de hoeken tusschen de gegeven cirkels middendoor deelen. (§ 17).

3. De m. p. van de toppunten der driehoeken, die op dezelfde basis AB staan en wier oppervlakken gelijk zijn, is een kleine cirkel door de tegenpunten A' en B'. (§ 24).

4. Als A en B twee vaste punten zijn, dan is de m. p. der punten P, waarvoor $\sin\frac{1}{2}PA : \sin\frac{1}{2}PB$ constant is, een kleine cirkel. (§ 149).

5. Als A en B twee vaste punten zijn, dan is de m. p. der punten P, waarvoor $\cos\frac{1}{2}PA : \cos\frac{1}{2}PB$ constant is, een kleine cirkel. (§ 150).

6. Als A, B en C drie punten op een grooten cirkel zijn (B tusschen A en C), dan is de m. p. der punten P, waarvoor de oppervlakken der boldriehoeken PAB en PBC gelijk zijn, een kleine cirkel. (§ 150).

In dit hoofdstuk zullen aan deze m. p. nog eenige belangrijke worden toegevoegd.

§ 161. Eigenschap. Als A en B twee vaste punten zijn, dan is de m. p. der punten P, waarvoor

$$\cos PA : \cos PB$$

constant is, een groote cirkel loodrecht op boog AB.

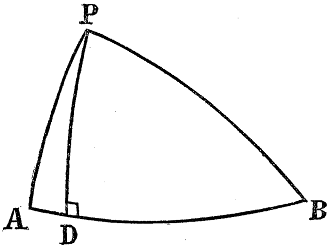


Fig. 78.

Bewijs.

Als in fig. 78 P een der punten is, die aan de vraag voldoen, en men trekt PD $\perp$ AB, dan is

$$\frac{\cos PA}{\cos PB} = \frac{\cos PD \cos AD}{\cos PD \cos BD} = \frac{\cos AD}{\cos BD}.$$

Hieruit volgt, dat cos AD : cos BD constant is; D is dus een vast punt op AB. De groote cirkel, die AB in D loodrecht snijdt, is dus de gevraagde m. p.

Opmerking. De m.p., bedoeld in § 17, is hiervan een bijzonder geval.

§ 162. Eigenschap. Als AB en AC twee vaste groote cirkels, en PX en PY de spherische afstanden van een punt P tot AB en AC zijn, dan is de m.p. der punten P, waarvoor

$$\sin PX : \sin PY$$

constant is, een groote cirkel door A.

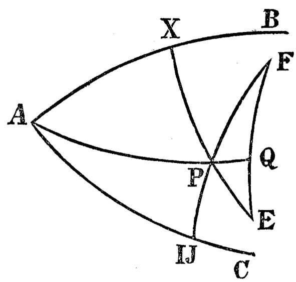


Fig 79.

Bewijs.

Verlengt men (fig. 79) XP en YP tot in E en F, totdat XE $=$ YF $= 90°$, dan zijn E en F polen van AB en AC, dus vaste punten.

Omdat $\sin PX = \cos PE$,

$\sin PY = \cos PF$,

moet ook $\cos PE : \cos PF$

constant zijn. Volgens de vorige paragraaf is dus de m.p. van P een groote cirkel loodrecht op EF. Omdat E en F polen van AB en AC zijn, is AF $=$ AE $= 90°$. A is dus een pool van EF. En daar de gevraagde m.p. loodrecht op EF staat, gaat zij door A.

Opmerkingen. 1. Door beschouwing der rechthoekige boldriehoeken PAX en PAY, die een gemeenschappelijke schuine zijde PA hebben, komt men tot hetzelfde besluit.

2. De m.p., bedoeld in § 17, is hiervan een bijzonder geval.

§ 163. Eigenschap. Als A en B twee vaste punten zijn, en p_1 en p_2 twee constanten, dan is de m.p. der punten P, waarvoor

$$p_1 \cos \mathrm{PA} + p_2 \cos \mathrm{PB}$$

constant ($= k$) is, een kleine cirkel, waarvan de pool op AB ligt.

Bewijs.

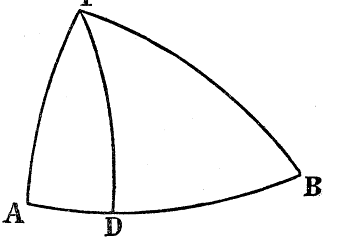


Fig. 80.

Zij (fig. 80) D een willekeurig punt op AB, dan is

$$\cos \mathrm{PA} = \cos \mathrm{PD} \cos \mathrm{AD} + \\ + \sin \mathrm{PD} \sin \mathrm{AD} \cos \mathrm{ADP},$$

$$\cos \mathrm{PB} = \cos \mathrm{PD} \cos \mathrm{BD} - \\ - \sin \mathrm{PD} \sin \mathrm{BD} \cos \mathrm{ADP},$$

waaruit volgt:

$$k = p_1 \cos \mathrm{PA} + p_2 \cos \mathrm{PB} =$$
$$\cos \mathrm{PD} (p_1 \cos \mathrm{AD} + p_2 \cos \mathrm{BD}) + \sin \mathrm{PD} \cos \mathrm{ADP} (p_1 \sin \mathrm{AD} - p_2 \sin \mathrm{BD}). \quad (1)$$

Bepaalt men nu D zoo, dat

$$p_1 \sin \mathrm{AD} - p_2 \sin \mathrm{BD} = 0,$$
$$\text{of} \quad \sin \mathrm{AD} : \sin \mathrm{BD} = p_2 : p_1, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

dan gaat (1) over in

$$k = p_1 \cos \mathrm{PA} + p_2 \cos \mathrm{PB} = \cos \mathrm{PD} (p_1 \cos \mathrm{AD} + p_2 \cos \mathrm{BD}),$$
$$\text{of} \quad \cos \mathrm{PD} = \frac{k}{p_1 \cos \mathrm{AD} + p_2 \cos \mathrm{BD}}. \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Hieruit volgt, dat de m.p. van P een kleine cirkel is uit D als pool en DP als spherische straal.

Teneinde cos PD in de gegevens k, p_1, p_2 en $\mathrm{AB} = a$ uit te drukken, heeft men volgens (2):

$$p_1 \cos \mathrm{AD} : p_2 \cos \mathrm{BD} = \sin \mathrm{BD} \cos \mathrm{AD} : \sin \mathrm{AD} \cos \mathrm{BD},$$
$$\frac{p_1 \cos \mathrm{AD} + p_2 \cos \mathrm{BD}}{\sin a} = \frac{p_1}{\sin \mathrm{BD}}.$$

Bovendien volgt uit (2):

$$\sin (a - \mathrm{BD}) : \sin \mathrm{BD} = p_2 : p_1,$$

waaruit men gemakkelijk afleidt:

$$\sin \mathrm{BD} = \frac{p_1 \sin a}{\sqrt{(p_1{}^2 + p^2{}_2 + 2 p_1 p_2 \cos a)}},$$

zoodat

$$p_1 \cos \mathrm{AD} + p_2 \cos \mathrm{BD} = \sqrt{(p_1{}^2 + p_2{}^2 + 2 p_1 p_2 \cos a)},$$

en
$$\cos \mathrm{PD} = \frac{k}{\sqrt{(p_1{}^2 + p^2{}_2 + 2 p_1 p_2 \cos a)}} \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Discussie. Construeert men een vlakken driehoek, waarvan p_1 en

p_2 twee zijden zijn, en $\pi - a$ de ingesloten hoek is, dan stelt $\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos a)}$ de derde zijde van dien driehoek voor.

Is k kleiner dan die derde zijde, dan is de m.p. een kleine cirkel; is k gelijk aan die derde zijde, dan is de m.p. een punt, nl. punt D; is k grooter dan de derde zijde, dan is de m.p. onbestaanbaar. Is $k = o$, dan is de m.p. een groote cirkel, loodrecht op AB. (Zie § 162).

Een eenvoudig geval verkrijgt men, als $p_1 = p_2 = 1$. *Dan ligt D op het midden van AB en PD is een mediaan van* $\triangle$ *ABP.*

§ 164. Eigenschap. Als AB en AC twee vaste groote cirkels, PX en PY de sperische afstanden van een punt P tot AB en AC, en p_1 en p_2 constanten zijn, dan is de m.p. der punten F, waarvoor

$$p_1 \sin PX + p_2 \sin PY$$

constant is, een kleine cirkel, waarvan de pool spherisch 90° van A verwijderd is.

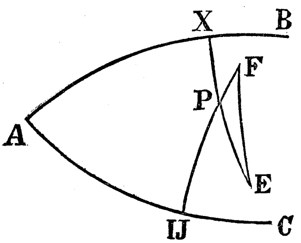


Fig. 81.

Bewijs.

Verlengt men (fig. 81) XP en YP tot in E en F, zoodat $XE = YF = 90°$, dan zijn E en F polen van AB en AC, dus vaste punten, terwijl

$$p_1 \sin PX + p_2 \sin PY =$$
$$= p_1 \cos PE + p_2 \cos PF.$$

Volgens de voorgaande paragraaf is dus de m.p. een cirkel, waarvan de pool op EF ligt, en daar A een pool van EF is, ligt de pool van de m.p. spherisch 90° van A.

§ 165. De in de voorgaande paragrafen gevonden uitkomsten maken het mogelijk, eenige belangrijke toepassingen te maken. In de eerste plaats zal gezocht worden naar de m.p. der punten P, waarvoor de som van de cosinussen der afstanden tot vier gegeven punten A, B, C en D constant is.

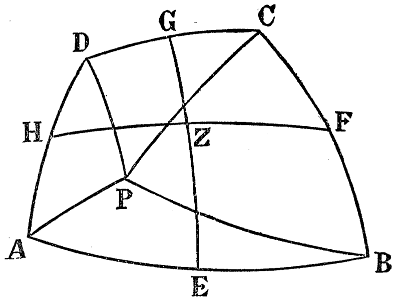


Fig. 82.

Analyse.

Is in fig. 82 ABCD een bolvierhoek, waarvan $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, terwijl E, F, G en H de middens van AB, BC, CD en DA zijn, dan is

$$\cos PA + \cos PB = 2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos PE,$$
$$\cos PC + \cos PD = 2 \cos \tfrac{1}{2}c \cos PG.$$

Hieruit volgt, dat

$$2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos PE + 2 \cos \tfrac{1}{2}c \cos PG$$

constant moet zijn.

In verband met § 163 blijkt dus, dat de m.p. een cirkel is, waarvan de pool op EG ligt. Men heeft echter ook

$$\cos PA + \cos PB + \cos PC + \cos PD =$$
$$= 2 \cos \tfrac{1}{2}b \cos PF + 2 \cos \tfrac{1}{2}d \cos PH.$$

De m.p. is dus ook een cirkel, waarvan de pool op HF ligt. De gezochte pool is dus het snijpunt Z van EG en FH; en omdat de verbindingsboog van de middens der diagonalen ook door Z gaat (§ 34 en § 112), heeft men de

Eigenschap. Als ABCD een bolvierhoek is, en Z is het snijpunt van de verbindingsbogen van de middens der overstaande zijden en der diagonalen, dan is elke cirkelomtrek uit Z als pool beschreven de m.p. der punten P, waarvoor

$$\mathbf{\cos PA + \cos PB + \cos PC + \cos PD}$$

constant is.

In verband met § 163 heeft men nog:

$$\mathbf{\sin ZE : \sin ZG = \cos \tfrac{1}{2}c : \cos \tfrac{1}{2}a,}$$
$$\mathbf{\sin ZF : \sin ZH = \cos \tfrac{1}{2}d : \cos \tfrac{1}{2}b.}$$

Het is thans mogelijk het punt te bepalen, waarvoor de som van de cosinussen der afstanden tot A, B, C en D een maximum is.

Moet $\cos PA + \cos PB + \cos PC + \cos PD = k$ zijn, dan volgt uit de vergelijking

$$2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos PE + 2 \cos \tfrac{1}{2}c \cos PG = k,$$

dat $$\cos PZ = \frac{k}{\sqrt{(4 \cos^2 \tfrac{1}{2}a + 4 \cos^2 \tfrac{1}{2}c + 8 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}c \cos EG)}}.$$

Stelt men $AC = f$, $BD = g$, dan is

$$\cos EG = \frac{\cos b + \cos d + \cos f + \cos g}{4 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}c}.$$

Daardoor wordt

$$\cos PZ = \frac{k}{\sqrt{\{4 + 2(\cos a + \cos b + \cos c + \cos d + \cos f + \cos g)\}}}. \quad (5)$$

Omdat nu $\cos PZ \leqq +1$,

kan k hoogstens gelijk zijn aan den noemer van de breuk in (5). In dit geval bereikt k een maximumwaarde, terwijl $\cos PZ = 1$ is, zoodat P samenvalt met Z. Men heeft dus de

Eigenschap. Voor het punt Z in bolvierhoek ABCD is

$$\cos ZA + \cos ZB + \cos ZC + \cos ZD$$

zoo groot mogelijk.

§ 166. Eigenschap. Als ABC een boldriehoek is, en p_1, p_2 en p_3 constanten zijn, dan is de m.p. der punten P, waarvoor

$$p_1 \cos PA + p_2 \cos PB + p_3 \cos PC$$

constant ($= k$) is, een cirkelomtrek.

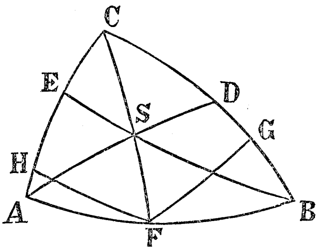


Fig. 83.

Bewijs.

Is in fig. 83 D een punt op BC zoo, dat

$$\sin BD : \sin CD = p_3 : p_2, \quad . \quad (6)$$

dan is volgens § 163

$$p_2 \cos PB + p_3 \cos PC =$$
$$= \cos PD\,(p_2 \cos BD + p_3 \cos CD),$$

dus

$$k = p_1 \cos PA + (p_2 \cos BD +$$
$$+ p_3 \cos CD) \cos PD. \quad (7)$$

Omdat A en D vaste punten, en p_1 en $p_2 \cos BD + p_3 \cos CD$ constante coëfficiënten zijn, is de m. p. van P volgens § 163 een cirkelomtrek, waarvan de pool op AD ligt.

Neemt men S op AD zóó, dat

$$\sin AS : \sin DS = (p_2 \cos BD + p_3 \cos CD) : p_1,$$

dan gaat (7) over in:

$$k = \cos PS\,\{p_1 \cos AS + (p_2 \cos BD + p_3 \cos CD) \cos DS\},$$

waaruit na eenige herleidingen volgt:

$$\cos PS = \frac{k}{\sqrt{(p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2 + 2p_2p_3\cos a + 2p_3p_1\cos b + 2p_1p_2\cos c)}}. \quad (8)$$

Deze formule geeft den straal van den cirkel. Eenvoudiger bepaalt men het punt S door zijn normale coördinaten.

Volgens (6) ligt S op den cirkel AD, als D de zijde BC verdeelt in deelen, waarvan de sinussen zich verhouden als $p_3 : p_2$. Bepaalt men E en F op CA en AB zoo, dat

$$\sin AE : \sin CE = p_3 : p_1,$$

en

$$\sin BF : \sin AF = p_1 : p_2,$$

dan ligt S ook op BE en CF. S is derhalve het snijpunt van AD, BE en CF. Zijn nu x_1, x_2, x_3 de spherische afstanden van S tot BC, CA en AB, en FG en FH die van F tot BC en CA, dan is

$$\frac{\sin x_1}{\sin x_2} = \frac{\sin FG}{\sin FH} = \frac{\sin BF}{\sin AF} \times \frac{\sin B}{\sin A}$$
$$= \frac{p_1}{p_2} \times \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{p_1}{\sin a} : \frac{p_2}{\sin b}.$$

Men heeft derhalve:

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \frac{p_1}{\sin a} : \frac{p_2}{\sin b} : \frac{p_3}{\sin c}. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Zijn $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$ de sinussen der driehoeken BSC, CSA, ASB, dan volgt uit (9):

$$p_1 : p_2 : p_3 = n_1 : n_2 : n_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Opmerkingen. 1. Door aan p_1, p_2, p_3 verschillende waarden toe te kennen, neemt S verschillende standen in. Stelt men $p_1 = p_2 = p_3$, dan is blijkens (10) ook $n_1 = n_2 = n_3$, zoodat S samenvalt met het zwaartepunt Z van boldriehoek ABC. (§ 117).

Men heeft dus de

Eigenschap. Als Z het spherisch mediaanpunt van boldriehoek ABC is, en P een punt op den omtrek van een cirkel, waarvan Z de pool is, dan is

$$\mathbf{\cos PA + \cos PB + \cos PC}$$

constant.

Uit (8) volgt dan, dat

$$\cos PA + \cos PB + \cos PC$$

een **maximumwaarde verkrijgt, als P samenvalt met Z.**

2. Wat in bovenstaande paragraaf gevonden werd, kan ook verkregen worden door middel van § 101.

§ **167. Eigenschap. Als ABC een boldriehoek is, PX ($= x_1$), PY ($= x_2$), PZ ($= x_3$) de spherische afstanden van een punt tot de zijden, en p_1, p_2, p_3 constanten zijn, dan is de m. p. der punten P, waarvoor**

$$p_1 \sin x_1 + p_2 \sin x_2 + p_3 \sin x_3$$

constant is, een cirkel.

Deze eigenschap kan uit de voorgaande afgeleid worden door beschouwing van den pooldriehoek. Als S de pool van dien cirkel is, dan is

$$\cos AS : \cos BS : \cos CS = \frac{p_1}{\sin a} : \frac{p_2}{\sin b} : \frac{p_3}{\sin c}.$$

§ **168.** Men kan de eigenschappen van § 166 en 167 uitbreiden tot de volgende:

Als een lineaire functie van de cosinussen der spherische afstanden van een punt tot eenige vaste punten constant is, dan is de m. p. van dat punt een cirkel.

Als een lineaire functie van de sinussen der spherische afstanden van een punt tot eenige vaste groote cirkels constant is, dan is de m. p. van dat punt een cirkel.

§ 169. De m. p. der punten te bepalen, vanwaar men twee gelijke spherische raaklijnen aan twee gegeven kleine cirkels kan trekken.

Zijn (fig. 84) M en N de polen der cirkels, waarvan R en r de spherische stralen zijn, en is P een punt der m. p., waaruit de gelijke raaklijnen PA en PB zijn getrokken, dan heeft men in de rechthoekige boldriehoeken PAM en PBN :

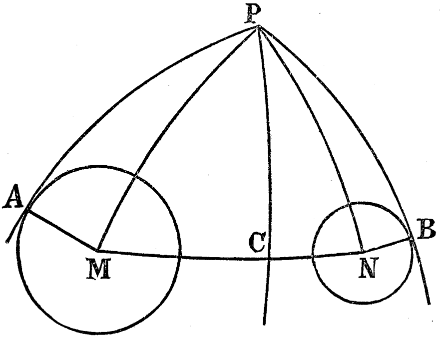


Fig. 84.

$$\cos PA = \frac{\cos PM}{\cos R},$$

$$\cos PB = \frac{\cos PN}{\cos r},$$

$$\frac{\cos PM}{\cos R} = \frac{\cos PN}{\cos r},$$

of $\cos PM : \cos PN = \cos R : \cos r.$

De gevraagde m. p. is dus volgens § 161 een groote cirkel PC loodrecht op MN.

Opmerkingen. 1. In verband met § 146 kunnen wij nu ook zeggen, dat de groote cirkel PC de m. p. is der punten, die gelijke spherische machten hebben ten opzichte der gegeven cirkels M en N. *Men noemt cirkel PC de* **machtlijn** *der gegeven cirkels.*

Een cirkel uit P als pool, met PA = PB als spherischen straal beschreven, zal de cirkels M en N orthogonaal snijden, m. a. w.

De machtlijn van twee cirkels is tevens de m. p. van de polen der cirkels, die de gegeven cirkels orthogonaal snijden.

Snijden de twee cirkels M en N elkaar, dan gaat de machtlijn door de snijpunten. Alleen het deel van de machtlijn, dat buiten de cirkels M en N ligt, is dan de m. p. der punten, van waaruit men gelijke raaklijnen kan trekken.

§ 170. Vraagstukken.

1. Van bolvierhoek ABCD is gegeven:
   a. $AB = 60°$, $BD = 45°$, $CD = 30°$, $B = 120°$, $C = 150°$. Bereken AD, A, D, en de diagonalen.
   b. $AB = 90°$, $BC = 90°$, $CD = 67°30'$, $DA = 75°20'$, $B = 90°$. Bereken de onbekende hoeken en de diagonalen.
   c. $AB = 43°5'30''$, $A = 93°43'20''$, $B = 59°29'40''$, $C = 132°25'30''$, $D = 74°57'25''$. Bereken de onbekende zijden.
   d. $AB = BC = AD = 90°$, $CD = 60°$, $A = B$. Bereken de hoeken en de diagonalen (§ 156).
   e. $AB = CD = 90°$, $AD = BC = 60°$, $AC = BD$. Bewijs, dat de diagonalen 120° zijn. (§ 156).
2. Van bolvierhoek ABCD is $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, en $A + C = 180°$. Bewijs, dat
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - d)}{\sin(s - b)\sin(s - c)}},$$
waarin $$2s = a + b + c + d.$$
3. Van bolvierhoek ABCD zijn de diagonalen gelijk en deelen elkaar middendoor. Als $AB = CD = 108°$, $AD = BC = 60°$, vraagt men de diagonalen en de hoeken te berekenen.
4. Van bolvijfhoek ABCDE, waarom een cirkel beschreven kan worden, is $AB = 90°$, terwijl de andere zijden elk 60° zijn. Bereken de hoeken.
5. Van een bolvierhoek ABCD is $C = D = \frac{\pi}{2}$, $AD < \frac{\pi}{2}$ en $BC < \frac{\pi}{2}$. Men laat uit het midden van AB den boog α loodrecht op CD neer. Bewijs, dat
$$\sin \alpha = \frac{\sin AD + \sin BC}{2 \cos \frac{1}{2}AB}.$$
6. Van een bolvierhoek ABCD zijn de overstaande hoeken A en C recht. AB en DC snijden elkaar in P. Bewijs, dat
$$\operatorname{tg} PA \times \operatorname{tg} PB = \operatorname{tg} PC \times \operatorname{tg} PD.$$
7. Van een bolvierhoek, waarvan de diagonalen gelijk zijn en elkaar middendoor deelen, zijn twee overstaande hoeken elk 135°. Bereken de oppervlakte van dien vierhoek, als R de straal van den bol is.
8. Van bolvierhoek ABCD staan de overstaande zijden AB en CD, en ook AD en BC loodrecht op elkaar. Bewijs:

a. Elk hoekpunt van dien vierhoek is het hoogtepunt (of het tegenpunt daarvan) van den boldriehoek, gevormd door de drie andere hoekpunten.

b. De producten van de cosinussen der overstaande zijden zijn gelijk.

9. Op den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABC neemt men, tusschen de punten B en C, een willekeurig punt P.
Bewijs, dat
$$\sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}\mathrm{PB} + \sin \tfrac{1}{2}c \sin \tfrac{1}{2}\mathrm{PC} = \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}\mathrm{PA}. \quad (\S\ 156).$$

10. Op den omgeschreven cirkel van een gelijkzijdigen boldriehoek ABC neemt men tusschen A en C een punt P, en op den ingeschreven cirkel van denzelfden driehoek een punt Q. Bewijs:

a. $\sin \tfrac{1}{2}\mathrm{PB} = \sin \tfrac{1}{2}\mathrm{PA} + \sin \tfrac{1}{2}\mathrm{PC}$.

b. $\cos \mathrm{PA} + \cos \mathrm{PB} + \cos \mathrm{PC} = \dfrac{\sin \frac{3}{2}\mathrm{AB}}{\sin \frac{1}{2}\mathrm{AB}}$.

c. $\cos \mathrm{QA} + \cos \mathrm{QB} + \cos \mathrm{QC} = \dfrac{2 \sin \frac{3}{2}\mathrm{AB}}{\sin \mathrm{AB}}$.

11. Als van een bolvierhoek de zijden in volgorde a, b, c, d zijn, de diagonalen f en g, de hoek der diagonalen φ, dan is
$$\cos \varphi \sin f \sin g = \cos a \cos c - \cos b \cos d.$$
Bewijs dit. Aan welke voorwaarde moeten de zijden voldoen, opdat de diagonalen loodrecht op elkaar staan?

12. Van een bolvierhoek ABCD zijn de diagonalen elk 90°. Als AC en BD elkaar in M snijden, en $\mathrm{MA} = \alpha$, $\mathrm{MB} = \beta$, dan is
$$\frac{\cos \mathrm{AB} + \cos \mathrm{CD}}{\cos \mathrm{BC} - \cos \mathrm{DA}} = \cot(\alpha - \beta).$$
$$\frac{\cos \mathrm{AB} - \cos \mathrm{CD}}{\cos \mathrm{BC} + \cos \mathrm{DA}} = \cot(\alpha + \beta).$$

13. Van een regelmatigen bolvierhoek is gegeven:

a. de zijde $= 60°$. Bereken den spherischen straal van den omgeschreven cirkel.

b. de oppervlakte is $\frac{1}{6}$ van het boloppervlak. Bereken de zijde.

c. de zijde $=$ boog $\cos \frac{1}{3}$. Bereken de hoeken, de diagonaal en de stralen der om- en ingeschreven cirkels.

d. de som van een zijde en een hoek is 180°. Bereken de zijde, den hoek en de diagonaal.

14. Van een regelmatigen bolvijfhoek is gegeven:

a. de zijde $=$ boog $\sin \frac{2}{3}\left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$. Bereken de hoeken en de diagonalen.

b. de oppervlakte is $^1/_{12}$ van het bolоppervlak. Bereken de zijde.

c. de zijde $= a$, de diagonaal $= b$. Bewijs, dat

$$\frac{\sin \frac{1}{2}b}{\sin \frac{1}{2}a} = 2 \sin \frac{3\pi}{10}.$$

d. de zijde en de diagonaal verhouden zich als 3 : 5. Bereken de zijde.

e. elk hoekpunt is een pool der overstaande zijde. Bereken de zijden, hoeken en diagonalen van dien vijfhoek, en toon aan, dat de diagonalen een kleineren regelmatigen vijfhoek insluiten, waarvan elke zijde gelijk is aan boog cot 2.

15. Van een regelmatigen bolvijfhoek is elke zijde 60°. Men trekt in dezen vijfhoek alle diagonalen, waardoor een kleinere regelmatige bolvijfhoek ontstaat. R stelt voor den spherischen straal van den omgeschreven cirkel van den eersten vijfhoek. Bewijs:

a. de diagonaal van den grooten vijfhoek is 108°.

b. $\operatorname{tg} R = 2 \sin 54°$.

c. de diagonalen van den grooten vijfhoek deelen elkaar in drie gelijke deelen.

d. de diagonaal van den kleinen vijfhoek is 60°.

16. Van den regelmatigen bolzeshoek ABCDEF is de straal van den omgeschreven cirkel 60°. Bereken de zijden en de hoeken van dien zeshoek.

De diagonalen AC, BD, CE, DF, EA en FB sluiten een kleineren regelmatigen zeshoek in, waarvan de zijde gelijk is aan boog $\cos \frac{3}{4}$. Bewijs dit.

17. Van een regelmatigen bolachthoek is gegeven:

a. de kleinste diagonaal is b, de straal van den omgeschreven cirkel is R. Bewijs, dat $\cos b = \cos^2 R$.

b. elke zijde is 30°. Bereken de hoeken en de diagonalen.

18. Van een regelmatigen boltienhoek is elke zijde gelijk aan boog $\cos \frac{15 + \sqrt{5}}{20}$. Bereken de diagonalen.

19. Van een regelmatigen bol-n-hoek is a de zijde en R de spherische straal van den omgeschreven cirkel. Bewijs, dat

$$\cos R = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{a}{2}\right)}.$$

20. In een kleinen cirkel beschrijft men een bolveelhoek van even aantal zijden. Bewijs, dat de som van de 1e, 3e, 5e, . . . hoek gelijk is aan die van de andere hoeken.

21. Om een kleinen cirkel beschrijft men een bolveelhoek van even

aantal zijden. Bewijs, dat de som van de 1e, 3e, 5e, . . . zijde gelijk is aan die der andere zijden. Hoe wordt deze eigenschap als het aantal zijden oneven is?

22. MA ($=$ R) is straal van een kleinen cirkel. Op MA als middellijn beschrijft men een tweeden cirkel en trekt door het raakpunt A een boog van een grooten cirkel, die den kleinsten cirkel in B en den grootsten in C snijdt. Bewijs, dat

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} AC}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} AB} = 1 + \sec R \text{ is.}$$

23. Twee kleine cirkels raken elkaar in S. Door S trekt men een grooten cirkel, die de kleine cirkels bovendien nog in A en B snijdt. Bewijs, dat

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} AS}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} BS} \text{ constant is.}$$

24. Van boldriehoek ABC zijn AD, BE en CF hoogtelijnen, die elkaar in H snijden. Men verlengt HA met een stuk $AA' = HA$, en HD met een stuk $DA'' = HD$. Evenzoo construeert men de punten B', B'', C', C''. Bewijs, dat op een cirkelomtrek liggen: 1e A', A'', B', B''. 2e B', B'', C', C''. 3e C', C'', A', A''. (§ 119, n° 41, 4e).

25. Binnen een kleinen cirkel, waarvan de spherische straal r is, ligt op het oppervlak een punt P, dat op een spherischen afstand a van de pool van dien cirkel is verwijderd. Door P brengt men twee bogen van groote cirkels APB en CPD loodrecht op elkaar, die den cirkel in A, B, C en D snijden. Bewijs, dat

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}PA + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}PB + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}PC + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}PD = \frac{4 \sin^2 r}{(\cos r + \cos a)^2} \quad (\S\ 147).$$

26. In den boldriehoek ABC is D het midden van AB. De buitenbissectrix van hoek C en de middelloodlijn van AB snijden elkaar in M. De kleine cirkel uit M als pool en $MA = MB$ als spherische straal snijdt de binnenbissectrix van hoek C in P en Q. Bewijs, dat

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}CP = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} b}.$$

27. Van een bolkoordenvierhoek ABCD is E het snijpunt der diagonalen AC en BD. De spherische excessen der driehoeken ABC en ADC zijn E_d en E_b. Bewijs:

1e $\sin A : \sin C = \cos \frac{1}{2}CB \cos \frac{1}{2}CD : \cos \frac{1}{2}AB \cos \frac{1}{2}AD$.

2e $\sin AE : \sin EC = \sin \frac{1}{2}AB \sin \frac{1}{2}AD : \sin \frac{1}{2}BC \sin \frac{1}{2}DC$.

3e $\sin \frac{1}{2}E_d : \sin \frac{1}{2}E_b = \operatorname{tg} \frac{1}{2}BA \operatorname{tg} \frac{1}{2}BC : \operatorname{tg} \frac{1}{2} DA \operatorname{tg} \frac{1}{2}DC$.

4e Als tg $\frac{1}{2}$ AB : tg $\frac{1}{2}$ BC $=$ tg $\frac{1}{2}$ CD : tg $\frac{1}{2}$ DA, dan deelt de diagonaal BD de oppervlakte van ABCD middendoor.

28. Uit een punt H van den omgeschreven cirkel van een bolkoordenvierhoek laat men spherische loodlijnen neer op de zijden van den vierhoek. Bewijs, dat het product van de sinussen der loodlijnen op twee overstaande zijden een constante verhouding heeft tot het product van de sinussen der loodlijnen op de beide andere zijden. (§ 151).

29. Uit het hoekpunt C van den bolkoordenvierhoek ABCD laat men spherische loodlijnen CG en CF neer op de zijden AB en AD. Bewijs, dat

$$\sin CF : \sin CG = \cos \tfrac{1}{2}AB \sin \tfrac{1}{2}CD : \cos \tfrac{1}{2}AD \sin \tfrac{1}{2}BC.$$

30. Van een bolkoordenvierhoek ABCD, waarvan AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, is E het snijpunt der diagonalen AC en BD. De spherische loodlijnen uit E op a. b, c en d zijn h_a, h_b, h_c, h_d; de sinussen der boldriehoeken ABE, BCE, CDE, DAE zijn $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$, $2n_4$, terwijl de spherische excessen der driehoeken BCD, CDA, DAB en ABC zijn E_a, E_b, E_c, E_d. Bewijs:

1e $\sin h_a : \sin h_b : \sin h_c : \sin h_d =$

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}c} : \frac{1}{\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}d} : \frac{1}{\cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}a} : \frac{1}{\cos \frac{1}{2}d \sin \frac{1}{2}b}.$$

2e $\sin h_a : \sin h_c = \operatorname{tg} \frac{1}{2}a : \operatorname{tg} \frac{1}{2}c$,
$\sin h_b : \sin h_d = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b : \operatorname{tg} \frac{1}{2}d$.

3e $n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = \dfrac{\sin \frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}c} : \dfrac{\sin \frac{1}{2}b}{\sin \frac{1}{2}d} : \dfrac{\sin \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}a} : \dfrac{\sin \frac{1}{2}d}{\sin \frac{1}{2}b}$.

4e $n_1 n_3 = n_2 n_4$.

5e $\sin \frac{1}{2}E_a : \sin \frac{1}{2}E_b : \sin \frac{1}{2}E_c : \sin \frac{1}{2}E_d =$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}BC \operatorname{tg} \frac{1}{2}CD \operatorname{tg} \frac{1}{2}DB : \operatorname{tg} \frac{1}{2}CD \operatorname{tg} \frac{1}{2}DA \operatorname{tg} \frac{1}{2}AC :$
$: \operatorname{tg} \frac{1}{2}DA \operatorname{tg} \frac{1}{2}AB \operatorname{tg} \frac{1}{2}BD : \operatorname{tg} \frac{1}{2}AB \operatorname{tg} \frac{1}{2}BC \operatorname{tg} \frac{1}{2}CA$.

31. ABCD is een bolkoordenvierhoek. A′ en B′ zijn de tegenpunten van A en B. Bewijs:

1e De boldriehoeken A′B′D en A′B′C hebben dezelfde oppervlakte.

2e De groote cirkels, die de middens van A′C en B′D, van A′D en B′C verbinden, deelen elkaar middendoor.

32. Van een bolkoordenvierhoek ABCD is de diagonaal AC constant van grootte. Als de hoekpunten B en D zich zoo over den omgeschreven cirkel bewegen, dat de som der hoeken B en D constant is, dan is de oppervlakte van ABCD ook constant.

33. Van een bolraaklijnenvierhoek ABCD is $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Bewijs:
1e $\sin^2 \frac{1}{2}A : \sin^2 \frac{1}{2}C = \sin b \sin c : \sin a \sin d$.
2e $\sin a : \sin c = \sin \frac{1}{2}C \sin \frac{1}{2}D : \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B$.

34. Van den bolvierhoek ABCD is $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$, $BD = g$. De groote cirkels p, q en r verbinden resp. de middens van a en c, b en d, f en g. Bewijs:
1e $\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \frac{1}{2}f \cos \frac{1}{2}g \cos r$.
2e $\cos b + \cos d + \cos f + \cos g = 4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c \cos p$.
3e $\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c \cos p + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}d \cos q - \cos \frac{1}{2}f \cos \frac{1}{2}g \cos r =$
$$= \cos \tfrac{1}{2}(f + g) \cos \tfrac{1}{2}(f - g).$$

35. De snijpunten der overstaande zijden van een bolzeshoek, beschreven in een kleinen cirkel, liggen op een grooten cirkel. (Theorema van Pascal voor den bol).

36. De diagonalen, die de overstaande hoekpunten van een bolzeshoek, om een kleinen cirkel beschreven, verbinden, gaan door één punt. (Theorema van Brianchon voor den bol).

37. Van den rechtzijdigen boldriehoek ABC heeft de rechte zijde AB constante ligging. Als
$$\cot^2 A + \cot^2 B$$
constant is, dan is de m.p. van C een kleine cirkel. Bewijs dat.

38. Van een boldriehoek zijn de basis en het verschil der opstaande zijden constant. Bewijs, dat het product van de sinussen van de loodlijnen, uit de basisuiteinden op de bissectrix van den tophoek neergelaten, constant is.

39. Als boog $AB = 90°$ is, A en B vast zijn en
$$\cos^2 PA + \cos^2 PB$$
constant is, dan is de m.p. van P een kleine cirkel.

40. Als van een boldriehoek ABC de basis AB constant is in ligging en grootte, en ook $\cot A - \cot B$ constant is, dan is de m.p. van C een groote cirkel, die door het midden van AB gaat. Bepaal ook de m.p. van C, als $\cot A + \cot B$ constant is. Evenzoo, als $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B$ constant is.

41. Als de beenen van $\angle C$ van boldriehoek ABC een vaste ligging hebben, en $\operatorname{tg} a : \operatorname{tg} b$ constant is, dan gaat de basis AB door een vast punt.

42. Op een kleinen cirkel, waarvan M de pool is, neemt men een veranderlijk punt B. A is een vast punt op den bol. Men construeert een cirkel, die MA in A raakt en door B gaat. De

spherische straal MB snijdt den cirkel in C. Bepaal de m. p. van C.

43. ABCD is een bolkoordenvierhoek. Door A en B, en ook door C en D brengt men veranderlijke kleine cirkels, die elkaar in P uitwendig raken. Bepaal de m. p. van P.

44. A, B en D zijn drie vaste punten op een grooten cirkel. Men construeert veranderlijke kleine cirkels door A en B en trekt uit D een spherische raaklijn aan dien cirkel. Bepaal de m. p. van het raakpunt C.

45. Van een boldriehoek ABC is AD een mediaan, O is de pool van den omgeschreven cirkel. Verder is gegeven, dat $\cos AB + \cos AC$ constant is. Bewijs:

1e Als A en C vast zijn, dan is de m. p. van B en C een kleine cirkel.

2e Als A en D vast zijn, dan is de m. p. van O een groote cirkel loodrecht op AD.

3e Als A en O vast zijn, dan is de m. p. van D een groote cirkel loodrecht op AO.

46. Als de beenen van $\angle C$ van boldriehoek ABC een vaste ligging hebben, en $\cos A + \cos B$ constant is, dan raakt de veranderlijke basis AB aan een vasten cirkel.
Bewijs, dat dit ook het geval is, als $\cos \frac{1}{2}A : \cos \frac{1}{2}B$ constant is.

47. D, E en F zijn de middens der zijden BC, CA en AB van boldriehoek ABC. ED en CF snijden elkaar in P. Bewijs, dat $\sin PE : \sin PD = \cos \frac{1}{2}a : \cos \frac{1}{2}b$.

48. Men bepaalt op de basis AB van een boldriehoek ABC een punt D zoo, dat

$$\sin AD : \sin BD = \cos a : \cos b.$$

Vervolgens verlengt men CA met een boog $AP = CA$, en CB met een boog $BQ = CB$. Boog CD snijdt PQ in R. Bewijs, dat CR een mediaan is in boldriehoek PQC.

49. Van den bolvierhoek ABCD zijn G, F, H, E, P en Q de middens van AB, BC, CD, DA, AC en BD. QA en QC snijden GE en FH in K en L, PB en PD snijden GF en EH in N en M. Bewijs, dat KL en MN elkaar snijden in het snijpunt van HG, EF en PQ.

50. Als ABC een boldriehoek is, dan is de m.p. van de punten P, waarvoor

(1) $\sin a \cos PA + \sin b \cos PB + \sin c \cos PC$,

(2) $\sin^2 a \cos PA + \dots\dots + \dots\dots$,

(3) $\operatorname{tg} A \cos PA + \ldots\ldots + \ldots\ldots,$

(4) $\sin(s-a) \cos PA + \ldots\ldots + \ldots\ldots,$

(5) $\operatorname{cosec} a \cos PA + \ldots\ldots + \ldots\ldots,$

constant is, een cirkel, waarvan de pool ligt in

(1) de pool van den ingeschreven cirkel.

(2) het symmediaanpunt.

(3) het hoogtepunt.

(4) het isoperimetrisch punt. (§ 113, en § 152 n°. 50).

(5) het punt, dat isotomisch verwant is met de pool van den ingeschreven cirkel.

51. Bewijs, dat de machtlijn van twee cirkels de gemeenschappelijke in- en uitwendige raaklijnen dier cirkels halveert.

52. Gegeven zijn drie cirkels.

1e Bepaal een punt, dat ten opzichte van deze cirkels gelijke machten heeft. (*Machtpunt der drie cirkels*).

2e Construeer een cirkel, die de gegeven cirkels orthogonaal snijdt.

53. Gegeven zijn twee kleine cirkels M en N, waarvan l de machtlijn is. Construeer een cirkel O, die met M of N dezelfde machtlijn l heeft.

Bepaling. *Een stelsel cirkels op een bol, die twee aan twee dezelfde machtlijn hebben, heet een* **coaxaal** *stelsel cirkels.*

54. Bewijs de eigenschappen:

a. Elke cirkel, uit een punt der machtlijn van een coaxaal stelsel cirkels als pool beschreven, die een der cirkels van het stelsel orthogonaal snijdt, snijdt alle cirkels van het stelsel orthogonaal.

b. Alle cirkels, die de cirkels van een coaxaal stelsel cirkels orthogonaal snijden, gaan door twee vaste punten. (Grenspunten van Poncelet).

55. De m. p. van de polen der cirkels, die door een gegeven punt A gaan en een gegeven cirkel M orthogonaal snijden, is een groote cirkel loodrecht op AM.

56. De m. p. van de polen der cirkels met gegeven straal, die twee gegeven kleine cirkels onder gelijke hoeken snijden, is een kleine cirkel.

57. De m. p. van de polen der cirkels, die de omtrekken van twee gegeven cirkels M en N middendoor deelen, is een groote cirkel loodrecht op MN.

58. Construeer een cirkel, die de omtrekken van drie gegeven cirkels middendoor deelt.

59. Bewijs de volgende eigenschappen:
    a. De m.p. van de polen der kleine cirkels, die door een gegeven punt A gaan en den omtrek van een gegeven cirkel M middendoor deelen, is een groote cirkel loodrecht op AM.
    b. De m.p. van de polen der kleine cirkels, die een gegeven cirkel M orthogonaal snijden, en den omtrek van een gegeven cirkel N halveeren, is een groote cirkel loodrecht op MN.

60. De in- en uitwendige gelijkvormigheidspunten van twee cirkels verdeelen den spherischen afstand der polen dier cirkels in deelen, waarvan de sinussen evenredig zijn met de sinussen der stralen van de gegeven cirkels.

61. De drie uitwendige gelijkvormigheidspunten van drie cirkels twee aan twee liggen op een grooten cirkel. Evenzoo twee inwendige en één uitwendig gelijkvormigheidspunt.

62. Door een der gelijkvormigheidspunten van twee cirkels M en N trekt men een grooten cirkel, die M en N achtereenvolgens in A, B, C en D snijdt. Bewijs, dat

$$\angle MAB = \angle MBA = \angle NCD = \angle NDC.$$

Bepaling. *Men noemt A en C* **homologe** *punten, evenzoo B en D. A en D zijn* **antihomologe** *punten, evenzoo B en C.*
Bewijs nu de volgende eigenschap:
Door een der gelijkvormigheidspunten van twee cirkels M en N trekt men twee groote cirkels, waarvan de eerste M en N in de antihomologe punten P en Q, de tweede M en N in de antihomologe punten R en S snijdt. Bewijs, dat P, Q, R en S op een kleinen cirkel liggen.

63. Als een kleine cirkel M twee kleine cirkels N en O raakt, liggen de raakpunten met een der gelijkvormigheidspunten van N en O op een grooten cirkel.

64. Zijn A_1, $A_2 \ldots . A_{2n} + 1$ de punten, die den omtrek van een kleinen cirkel met pool O en straal R in $2n + 1$ gelijke deelen verdeelen, en zij D_i de boog van een grooten cirkel, die een willekeurig punt P van den kleinen cirkel verbindt met A_i, dan heeft men:

$$\sin \tfrac{1}{2} D_1 + \sin \tfrac{1}{2} D_3 + \ldots . . \sin \tfrac{1}{2} D_{2n+1} =$$
$$\sin \tfrac{1}{2} D_2 + \sin \tfrac{1}{2} D_4 + \ldots . . \sin \tfrac{1}{2} D_{2n}.$$

(Visschers Mathesis 1912).

65. Zijn A_1, $A_2 \ldots . A_n$ de punten, waarin een kleine cirkel met straal R en pool O in n gelijke deelen verdeeld wordt, zij P een willekeurig punt van het boloppervlak, en D_i de boog van een grooten cirkel, die P verbindt met A_i, dan heeft men: $\cos D_1 + \cos D_2 + \ldots . . \cos D_n = n \cos R \cos D$, waarin $D = PO$.

(Visschers Mathesis 1912).

66. Bewijs ook, dat men heeft:

$$\cos^2 D_1 + \cos^2 D_2 + \ldots . . \cos^2 D_n =$$
$$n^2 (\cos^2 R \cos^2 D + \sin^2 R \sin^2 D).$$

(Visschers, Mathesis 1912).

67. Beschrijf in een boldriehoek 3 cirkels, die ieder twee zijden des driehoeks en de twee andere cirkels aanraken.

(Malfatti).

VIII. DE CIRKEL VAN HART.

§ **171.** In den vlakken driehoek is er een cirkel, die de in- en de aangeschreven cirkels van dien driehoek raakt. Dit is de bekende negenpuntscirkel van Feuerbach. Dr. Hart vond, dat de eigenschap bleef doorgaan voor den boldriehoek, voor zoover het een raken der in- en aangeschreven cirkels betrof; deze cirkel gaat echter niet meer door de middens der zijden, de voetpunten der hoogtelijnen, en de middens van de bovenste stukken der hoogtelijnen.

§ **172.** Zij, om tot het bewijs te komen, in fig. 85 ABC een boldriehoek, I, I_1, I_2, I_3 de polen der in- en aangeschreven cirkels, waarvan r, r_1, r_2 en r_3 de spherische stralen zijn. Is N een willekeurig punt op het bolvlak, en zijn $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$, $2n_4$ de sinussen der boldriehoeken II_2I_3, II_3I_1, II_1I_2, $I_1I_2I_3$, dan is volgens de eigenschap van § 101:

$$n_1 \cos NI_1 + n_2 \cos NI_2 + n_3 \cos NI_3 = n_4 \cos NI.$$

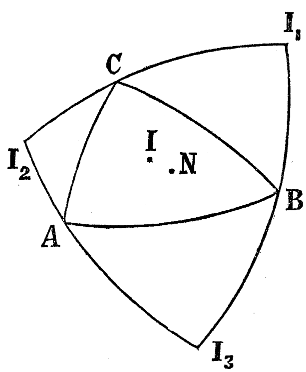


Fig. 85.

De mogelijkheid van een cirkel, die den ingeschreven cirkel inwendig en de aangeschreven cirkels uitwendig raakt, zal blijken, door aan te toonen, dat de vergelijking

$$n_1 \cos (x + r_1) + n_2 \cos (x + r_2) + n_3 \cos (x + r_3) = n_4 \cos (r - x)$$

een bestaanbare waarde voor x geeft.

Immers, in dat geval bestaat een punt N op het bolvlak, waarvan de spherische afstanden tot I_1, I_2, I_3 en I resp. zijn $x + r_1$, $x + r_2$, $x + r_3$ en $\pm (r - x)$.

Verdrijft men de haakjes uit bovenstaande vergelijking en deelt door $\cos x$, dan komt er

$$\operatorname{tg} x = \frac{n_1 \cos r_1 + n_2 \cos r_2 + n_3 \cos r_3 - n_4 \cos r}{n_1 \sin r_1 + n_2 \sin r_2 + n_3 \sin r_3 + n_4 \sin r}.$$

Omdat $IC \perp I_1I_2$ is, heeft men

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \triangle II_2I_3}{\sin \triangle II_1I_3} = \frac{\sin CI_2}{\sin CI_1} = \frac{\sin r_2}{\sin r_1},$$

$$\text{en}\quad \frac{n_1}{n_4} = \frac{\sin \triangle \mathrm{II_2I_3}}{\sin \triangle \mathrm{I_1I_2I_3}} = \frac{\sin \mathrm{AI}}{\sin \mathrm{AI_1}} = \frac{\sin r}{\sin r_1},$$

waaruit volgt

$$n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = \frac{1}{\sin r_1} : \frac{1}{\sin r_2} : \frac{1}{\sin r_3} : \frac{1}{\sin r}.$$

Men verkrijgt daardoor

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \tfrac{1}{4}(\cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3 - \cot r) \\ &= \frac{1}{4n}\{\sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) - \sin s\} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{n} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} \mathrm{R}, \end{aligned}$$

als R de spherische straal van den omgeschreven cirkel is. Hiermede is bewezen, dat er een cirkel bestaat, die de in- en aangeschreven cirkels raakt. Noemt men ρ de spherische straal van dien cirkel, dan is

$$\mathbf{tg}\,\rho = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{tg\,R}.$$

§ 173. Bepaling van de afstanden van de pool van den cirkel van Hart tot de hoekpunten.

Volgens het theorema van Stewart, toegepast op het stelsel punten N, I_1, I_2, C, verkrijgt men:

$$\cos(\rho + r_1)\sin \mathrm{CI_2} + \cos(\rho + r_2)\sin \mathrm{CI_1} = \cos \mathrm{NC} \sin \mathrm{I_1I_2},$$

en omdat

$$\sin \mathrm{CI_1} = \frac{\sin r_1}{\cos \frac{1}{2}\mathrm{C}}, \qquad \sin \mathrm{CI_2} = \frac{\sin r_2}{\cos \frac{1}{2}\mathrm{C}},$$

$$\sin \mathrm{CI_1} = \cos r_1 \cos(s-b), \quad \cos \mathrm{CI_2} = \cos r_2 \cos(s-a),$$

gaat bovenstaande vergelijking door substitutie hiervan en na vermenigvuldiging met $\dfrac{\cos \frac{1}{2}\mathrm{C}}{\cos \rho \sin r_1 \sin r_2}$ over in

$$\begin{aligned} \cot r_1 + \cot r_2 - 2\operatorname{tg}\rho &= \frac{\cos \mathrm{NC}}{\cos \rho}\{\cot r_2 \cos(s-a) + \cot r_1 \cos(s-b)\} \\ &= \frac{\cos \mathrm{NC}}{\cos \rho} \cdot \frac{\sin(s-b)\cos(s-a) + \sin(s-a)\cos(s-b)}{n} \\ &= \frac{\cos \mathrm{NC}}{\cos \rho} \cdot \frac{\sin c}{n}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{NC} &= \frac{n \cos \rho}{\sin c}(\cos r_1 + \cot r_2 - 2\operatorname{tg}\rho) \\ &= \frac{n\cos\rho}{2\sin c}(2\cot r_1 + 2\cot r_2 - 4\operatorname{tg}\rho), \end{aligned}$$

en omdat $\quad 4\operatorname{tg}\rho = \cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3 - \cot r,$

wordt $\cos \mathrm{NC} = \dfrac{n \cos \rho}{2 \sin c} (\cot r_1 + \cot r_2 - \cot r_3 + \cot r)$

$$= \frac{\cos \rho}{2 \sin c} \{\sin (s - a) + \sin (s - b) - \sin (s - c) + \sin s\}$$

$$= \frac{2 \cos \rho \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sin c}, \text{ of}$$

$$\mathbf{\cos NC} = \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c} \cos \rho.$$

Evenzoo is

$$\mathbf{\cos NA} = \frac{\cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a} \cos \rho, \qquad \mathbf{\cos NB} = \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}b} \cos \rho.$$

§ 174. Ligging van de snijpunten van den cirkel van Hart met de zijden van den boldriehoek.

Laten D en E de snijpunten met AB zijn, en zij F het midden van DE, dan is NF $\perp$ DE. Stelt men AD $= u$, AE $= v$, dan is

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\mathrm{AN} - \rho) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\mathrm{AN} + \rho)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\mathrm{AN} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\rho}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\mathrm{AN} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\rho} = \frac{\cos \rho - \cos \mathrm{AN}}{\cos \rho + \cos \mathrm{AN}}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}a - \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c},$$

Omdat BD $= c - u$, BD $= c - v$ is, heeft men door letterverwisseling

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (c - u) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (c - v) = \frac{\cos \frac{1}{2}b - \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}b + \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}c}.$$

Uit deze vergelijking volgt, in verband met de gevonden waarde van $\operatorname{tg} \frac{1}{2}u \operatorname{tg} \frac{1}{2}v$, dat

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}u + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}a - \cos^2 \frac{1}{2}b \cos^2 \frac{1}{2}c + \cos^2 \frac{1}{2}b \sin^2 \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c (\cos \frac{1}{2}a + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)}.$$

Men kent dus de som en het product van $\operatorname{tg} \frac{1}{2}u$ en $\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$. Door middel van een vierkantsvergelijking kan men dus die grootheden vinden. Merkt men echter op, dat de laatste breuk kan geschreven worden in den vorm

$$\frac{\cos \frac{1}{2}a - \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c} + \frac{\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c},$$

dan heeft men onmiddellijk

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}u = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{AD} = \frac{\cos \frac{1}{2}a - \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}.$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{AE} = \frac{\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a + \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Opmerking. Substitueert men de gevonden waarden van $\operatorname{tg} \frac{1}{2}u$ en $\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$ in

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{DE} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(v - u), \text{ dan vindt men}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{DE} = \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}a - \cos^2 \tfrac{1}{2}b}{2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}.$$

§ 175. Den hoek te bepalen, waaronder de cirkel van Hart de zijden snijdt.

De gevraagde hoek φ met de zijde AB is het complement van $\angle$NED (zie § 174). In den rechthoekigen boldriehoek NEF is

$$\sin \varphi = \cot \rho \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{DE},$$

$$\sin \varphi = 2 \cot \mathrm{R} \times \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}a - \cos^2 \tfrac{1}{2}b}{2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}$$

$$= \frac{n}{\sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c} \times \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}a - \cos^2 \tfrac{1}{2}b}{2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c}$$

$$= \frac{2n(\cos b - \cos a)}{\sin a \sin b\,(1 - \cos c)} = \frac{\cos b - \cos a}{1 - \cos c} \sin \mathrm{C}$$

$$= \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + b)}{\sin \tfrac{1}{2}c} \times \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - b)}{\sin \tfrac{1}{2}c} \sin \mathrm{C},$$

$$\sin \varphi = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{B})}{\sin \tfrac{1}{2}\mathrm{C}} \times \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{B})}{\cos \tfrac{1}{2}\mathrm{C}} \sin \mathrm{C} = \sin(\mathrm{A} - \mathrm{B}),$$

zoodat $\varphi = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

§ 176. Vraagstukken.

1. Als $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\sin x_3$ de normale coördinaten van de pool van den cirkel van Hart zijn, dan is $\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \cos(\mathrm{B} - \mathrm{C}) : \cos(\mathrm{C} - \mathrm{A}) : \cos(\mathrm{A} - \mathrm{B})$.
2. Als l_1 de raaklijn uit het hoekpunt A van boldriehoek ABC aan den cirkel van Hart is, dan is
$$\cos l_1 = \frac{\cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c}{\cos \tfrac{1}{2}a}.$$
3. Als ρ_1, ρ_2, ρ_3 de stralen der cirkels van Appollonius zijn en a_1, b_1, c_1 de stukken door den cirkel van Hart van de zijden van den boldriehoek afgesneden, dan is
$\operatorname{tg} \rho_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \rho_2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a$,
$\operatorname{tg} \rho_3 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b$. $\qquad$ (§ 152, n°. 48).
4. Als N de pool van den cirkel van Hart is, H het hoogtepunt, Z het snijpunt der medianen, P het punt dat isogonaal verwant is met H, en Q het snijpunt van de spherische loodlijnen uit de hoekpunten op de verbindingsbogen van de middens der zijden neergelaten, dan liggen op een grooten cirkel
1e H, N en Z. $\qquad$ 2e P, N en Q.

IX. TOEPASSINGEN DER BOLDRIEHOEKSMETING.

A. Stereometrische toepassingen.

§ 177. Berekening van de grootte der projectie van een hoek, als behalve die hoek, nog gegeven zijn de hoeken, die de beenen met de loodlijn op het projectievlak maken.

In fig. 86 is $\angle$ A′C′B′ de projectie van $\angle$ A′PB′ op vlak V. Gegeven zijn dan de hoeken A′P′B′, A′PC′ en B′PC′. Beschrijft men uit P als middelpunt met een willekeurige lijn als straal een bol, waarop de drievlakshoek PA′B′C′ zich afteekent als een boldriehoek ABC, dan zijn van dien driehoek de drie zijden bekend, n.l.

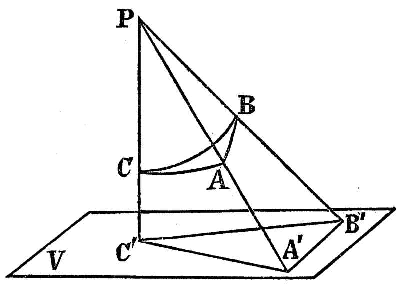


Fig. 86.

$$a = \angle \mathrm{B'PC'},\quad b = \angle \mathrm{C'PA'},\quad c = \angle \mathrm{A'PB'},$$

terwijl de hoek C gelijk is aan de projectie A′C′B′. Door middel van de formule

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mathrm{C} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$$

kan men derhalve den gevraagden hoek bepalen.

Opmerking. Bovenstaande berekening wordt genoemd: **een hoek tot den horizon herleiden.** Zij komt herhaaldelijk voor in de Geodesie.

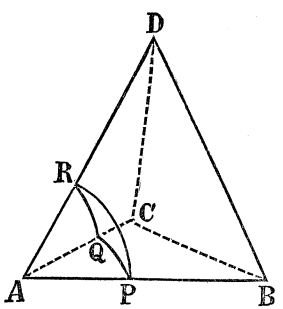


Fig. 87.

§ 178. De standhoeken te berekenen van een viervlak, waarvan de ribben gegeven zijn.

Beschrijft men uit hoekpunt A van viervlak ABCD met een willekeurige lijn als straal een bol, dan ontstaat op dien bol een boldriehoek PQR, waarvan de hoeken P, Q en R gelijk zijn aan de standhoeken van het viervlak op de ribben AB, AC en AD. Berekent men nu eerst uit de gegeven ribben de hoeken CAD, DAB en BAC, die gelijk zijn aan de zijden QR, RP en PQ van den boldriehoek, dan worden de standhoeken op de bekende wijze gevonden. Door ook B, C en D als middelpunten van bollen te beschouwen, verkrijgt men de standhoeken op de ribben CD, DB en BC.

Opmerkingen. 1. Dezelfde methode kan dienen bij de berekening der standhoeken van een regelmatige n-zijdige pyramide, wanneer daarvan een ribbe aan het grondvlak en een opstaande ribbe gegeven zijn.

2. Stelt men in bovenstaande paragraaf alle ribben gelijk, dan vindt men den standhoek van het **regelmatig viervlak.**

3. Handelt men op gelijke wijze bij het **regelmatig zesvlak (kubus)**, dan ontstaat een gelijkzijdige boldriehoek, waarvan elk der zijden, dus ook elk der hoeken, 90° is.

4. Neemt men een **regelmatig achtvlak,** dan ontstaat een bolvierhoek met zijden van 60° en diagonalen van 90°. De hoek van dien bolvierhoek is gelijk aan den gevraagden standhoek.

5. Voor een **regelmatig twaalfvlak** ontstaat een gelijkzijdige boldriehoek met zijden van 108°.

6. Voor het **regelmatig twintigvlak** verkrijgt men een regelmatigen bolvijfhoek met een zijde van 60°. Verbindt men het spherisch middelpunt van dien vijfhoek met twee opeenvolgende hoekpunten, dan ontstaat een gelijkbeenige boldriehoek met een basis van 60° en een tophoek van 72°. De basishoek hiervan is de helft van den gezochten standhoek.

§ **179.** De in de opmerkingen 2—6 van de voorgaande paragraaf aangegeven methode ter bepaling van de standhoeken der regelmatige veelvlakken is practisch de eenvoudigste. Uit theoretisch oogpunt is belangrijk de volgende

Eigenschap. Is S de standhoek van een regelmatig veelvlak, m het aantal ribben, dat in elk hoekpunt van dat veelvlak samenkomt, en n het aantal zijden van elk zijvlak, dan is

$$\sin \tfrac{1}{2} S = \frac{\cos \dfrac{\pi}{m}}{\sin \dfrac{\pi}{n}}.$$

Bewijs.

In fig. 88 is M het middelpunt van het veelvlak, BD een ribbe, A en C zijn de middelpunten van de zijvlakken, die de ribbe BD gemeen hebben, terwijl E het midden is van BD. Omdat AE en CE loodrecht op BD staan, is $\angle$ AEC $=$ S, dus $\angle$ AEM $= \frac{1}{2}$S.

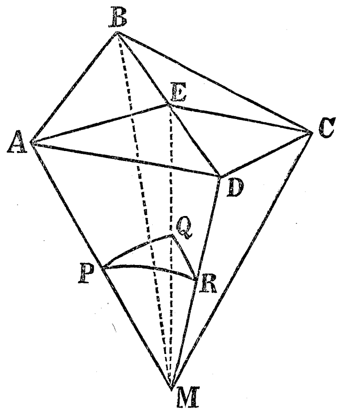


Fig. 88.

Construeert men een bol uit M als middelpunt, dan snijdt de drievlakshoek MAED het oppervlak van dien bol volgens een driehoek PQR, waarvan

$$\angle Q = 90^\circ,\ \angle PRQ = \frac{\pi}{m},\ \angle QPR = \frac{\pi}{n},\ \text{en}$$

$$PQ = \angle AME = \frac{\pi}{2} - \angle AEM = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}S.$$

Men heeft nu in den driehoek PQR

$$\cos R = \sin P \cos PQ$$

$$\cos \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \tfrac{1}{2}S,$$

$$\text{of} \qquad \sin \tfrac{1}{2}S = \cos \frac{\pi}{m} : \sin \frac{\pi}{n}.$$

Past men deze formule, of de methode van de voorgaande paragraaf toe, dan vindt men als standhoek voor het

viervlak	**: 70°31′44″**
zesvlak	**: 90°**
achtvlak	**: 109°28′16″**
twaalfvlak	**: 116°33′54″**
twintigvlak	**: 138°11′23″.**

De standhoeken van viervlak en achtvlak blijken dus elkaars supplement te zijn.

§ 180. De stralen van de om- en ingeschreven bollen der regelmatige veelvlakken te bepalen.

Zij weer S de standhoek van het veelvlak, m het aantal ribben, dat in elk hoekpunt samenkomt, n het aantal ribben van elk zijvlak, a de ribbe van het veelvlak, R en r de stralen der om- en ingeschreven bollen, dan is (fig. 88).

$$MB = MD = R,\ MA = MC = r,\ BD = a.$$

In den rechthoekigen driehoek MDE is de hoek DME gelijk aan de zijde QR van boldriehoek PQR. In dien boldriehoek is

$$\sin QR = \cot R \operatorname{tg} PQ,$$

of

$$\sin QR = \cot \frac{\pi}{m} \cot \tfrac{1}{2}S.$$

Verder is in den vlakken driehoek MDE:

$$MD = \frac{ED}{\sin DME} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin QR},$$

of

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2 \cot \frac{\pi}{m} \cot \frac{1}{2}S} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\,\mathbf{tg}\,\frac{\pi}{m}\,\mathbf{tg}\,\tfrac{1}{2}\mathbf{S}.$$

In den vlakken driehoek MAD, die rechthoekig is in A, is

$$MA = r = R \cos AMD = R \cos PR,$$

$$r = \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}S \times \cot \frac{\pi}{m} \cot \frac{\pi}{n},$$

of

$$\boldsymbol{r} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\,\mathbf{cot}\,\frac{\pi}{n}\,\mathbf{tg}\,\tfrac{1}{2}\mathbf{S}.$$

Opmerking. Uit de boven gevonden waarden voor R en r leidt men door deeling af

$$\frac{\mathbf{R}}{\boldsymbol{r}} = \mathbf{tg}\,\frac{\pi}{m}\,\mathbf{tg}\,\frac{\pi}{n}.$$

§ 181. Den inhoud van een viervlak uit te drukken in drie in één hoekpunt samenkomende ribben en de hoeken, welke die ribben twee aan twee met elkaar maken.

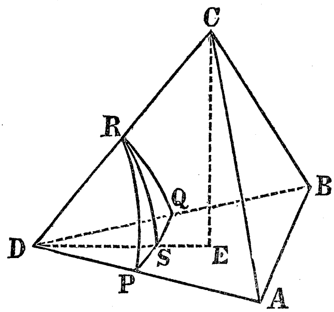


Fig. 89.

In fig. 89 zijn DA $= a$, DB $= b$, DC $= c$ de gegeven ribben, $\angle$ CDB $= \alpha$, $\angle$ CDA $= \beta$, $\angle$ ADB $= \gamma$ de gegeven hoeken. Is I de inhoud van het viervlak en CE $\perp$ vlak ABD, dan is

$$\begin{aligned} I &= \text{opp.} \triangle ABD \times \tfrac{1}{3} CE \\ &= \tfrac{1}{2}ab \sin \gamma \times \tfrac{1}{3}c \sin CDE \\ &= \tfrac{1}{6}abc \sin \gamma \sin CDE. \end{aligned}$$

Beschrijft men uit D als middelpunt met een willekeurige lijn DP als straal een bol, dan ontstaat een boldriehoek PQR, waarvan het oppervlak door het vlak CDE gesneden wordt volgens de spherische hoogtelijn RS. Nu is (zie § 105), als $\alpha + \beta + \gamma = 2s$ gesteld wordt,

$$\sin RS = \frac{2}{\sin \gamma} \sqrt{\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}.$$

Daardoor wordt

$$I = \tfrac{1}{6}abc \sin\gamma \times \frac{2}{\sin\gamma} \sqrt{\sin s \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}$$

$$\mathbf{I = \tfrac{1}{3}abc \sqrt{\sin s \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}}.$$

Opmerkingen. 1. Stelt men $b = c = a$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, dan wordt het viervlak regelmatig, en gaat bovenstaande formule over in

$$I = \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}\sin^3\frac{\pi}{6}} = \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{\tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2}.$$

2. Beschouwt men het parallelopipedum, waarvan DA, DB en DC (fig. 89) drie in een hoekpunt samenkomende ribben zijn, dan is de inhoud daarvan zes maal zoo groot als die van het viervlak ABCD. De inhoud van het parallelopipedum is dus

$$\mathbf{2abc\sqrt{\sin s \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}}.$$

§ 182. Den inhoud van een viervlak uit te drukken in zijn zes ribben.

Zij in fig. 89 DA $= a$, DB $= b$, DC $= c$, BC $= p$, AC $= q$, AB $= r$. Hebben α, β en γ dezelfde beteekenis als in de voorgaande paragraaf, dan is de inhoud.

$$I = \tfrac{1}{3}abc\sqrt{\sin s \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)},$$

dus volgens § 71 ook gelijk aan

$$\tfrac{1}{6}abc\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.$$

Nu is

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-p^2}{2bc},\quad \cos\beta = \frac{c^2+a^2-q^2}{2ca},\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-r^2}{2ab}.$$

Substitueert men deze waarden in de laatste formule, dan verkrijgt men na eenige herleidingen

$$\begin{aligned}144\,I^2 = {} & a^2p^2(-p^2+q^2+r^2)+b^2q^2(p^2-q^2+r^2)+c^2r^2(p^2+q^2-r^2)\\ & -p^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)-q^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)-r^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)\\ & -p^2q^2r^2.\end{aligned}$$

Opmerkingen. 1. Stelt men in de gevonden uitkomst alle ribben gelijk aan a, dan verkrijgt men voor den inhoud van het regelmatig viervlak, uitgedrukt in de ribbe a:

$$144\,I^2 = 2a^6,$$

$$I = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2}. \quad \text{(Zie opmerking 1 van § 181).}$$

2. Stelt men $b = c = a$, $q = r = p$, dan vindt men voor den inhoud eener regelmatige driezijdige pyramide, waarvan a de ribbe aan het grondvlak en p de opstaande ribbe is:

$$144\,I^2 = 3a^2p^4 - p^6$$

$$I = \tfrac{1}{12}p^2\sqrt{(3a^2-p^2)}.$$

3. Stelt men $p = a$, $q = b$, $r = c$, dan verkrijgt men voor den inhoud van het viervlak, waarvan de overstaande ribben twee aan twee gelijk zijn aan a, b en c:

$$144\,\mathrm{I}^2 = -4(a^6 + b^6 + c^6) + 2(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2) - 4a^2b^2c^2.$$

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{12}\sqrt{\{-4(a^6+b^6+c^6)+2(a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2)-4a^2b^2c^2\}}.$$

4. Men kan de verkregen uitkomst op de volgende manier in determinantvorm schrijven.

$$288\,\mathrm{I}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & p^2 & q^2 & c^2 \\ 1 & p^2 & 0 & r^2 & b^2 \\ 1 & q^2 & r^2 & 0 & a^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

§ 183. De betrekking te bepalen tusschen de zijden en de diagonalen van een bolvierhoek.

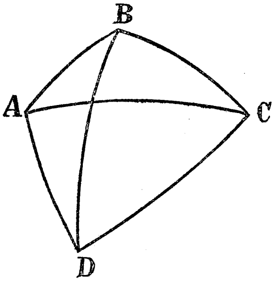


Fig. 90.

Zij ABCD (fig. 90) een bolvierhoek, waarvan $BC = \alpha$, $CA = \beta$, $AB = \gamma$, $DA = \alpha'$, $DB = \beta'$, $DC = \gamma'$. Stelt men de hoeken BDC, CDA en ADB resp. gelijk aan a_1, b_1, c_1, en $a_1 + b_1 + c_1 = 2s$, dan is, als D binnen den driehoek ligt:

$$2s = 360^\circ,$$

en als D er buiten ligt, is een der verschillen $s - a_1$, $s - b_1$, $s - c_1$, gelijk aan nul, zoodat voor elke positie van het punt D op den bol

$$\sin s \sin(s - a_1)\sin(s - b_1)\sin(s - c_1) = o,$$

of $\quad 1 - \cos^2 a_1 - \cos^2 b_1 - \cos^2 c_1 + 2\cos a_1 \cos b_1 \cos c_1 = o.$

Nu is
$$\cos a_1 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta'\cos\gamma'}{\sin\beta'\sin\gamma'},$$

$$\cos b_1 = \frac{\cos\beta - \cos\gamma'\cos\alpha'}{\sin\gamma'\sin\alpha'},$$

$$\cos c_1 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha'\cos\beta'}{\sin\alpha'\sin\beta'}.$$

Substitueert men deze waarden in bovenstaande formule, dan verkrijgt men voor de gevraagde betrekking:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'$$
$$- \cos^2\alpha\cos^2\alpha' - \cos^2\beta\cos^2\beta' - \cos^2\gamma\cos^2\gamma'$$
$$- 2(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta'\cos\gamma' + \cos\alpha'\cos\beta\cos\gamma' + \cos\alpha'\cos\beta'\cos\gamma)$$
$$+ 2(\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma' + \cos\alpha\cos\gamma\cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha\cos\beta\cos\alpha'\cos\beta') = 1.$$

Opmerking. Stelt men in de gevonden betrekking $\alpha' = \beta' = \gamma' = \mathrm{R}$, dan vindt men de bekende formule

$$\operatorname{tg} \mathrm{R} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma}{n}$$

terug.

§ **184. Den straal R van den omgeschreven bol van een viervlak in de ribben uit te drukken.**

Laat in fig, 89 $\mathrm{DA} = a$, $\mathrm{DB} = b$, $\mathrm{DC} = c$, $\mathrm{BC} = p$, $\mathrm{AC} = q$, $\mathrm{AB} = r$ zijn. Verbindt men de hoekpunten van het viervlak door bogen van groote cirkels op den omgeschreven bol, dan ontstaat een bolvierhoek, tusschen welks zijden en diagonalen de betrekking van § 183 bestaat.

Onderspant de ribbe a den boog α, dan is

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 1 - 2\left(\frac{a}{2\mathrm{R}}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{2\mathrm{R}^2},$$

terwijl men gelijksoortige uitdrukkingen heeft voor de cosinussen der andere bogen. Substitueert men deze waarden in de betrekking der voorgaande paragraaf, dan komt er, als I den inhoud van het viervlak is:

$$576\, \mathrm{I}^2\mathrm{R}^2 = 2\,(b^2c^2q^2r^2 + c^2a^2r^2p^2 + a^2b^2p^2q^2) - (a^4p^4 + b^4q^4 + c^4r^4).$$

Stelt men de som van de producten der overstaande ribben, d.i. $ap + bq + cr = 2\mathrm{S}$, dan verkrijgt men

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{\mathrm{S}\,(\mathrm{S} - ap)\,(\mathrm{S} - bq)\,(\mathrm{S} - cr)}}{6.\mathrm{I}}$$

of in woorden:

Beschouwt men den driehoek, waarvan de zijden de producten der overstaande ribben van een viervlak zijn, dan is de straal van den omgeschreven bol van dat viervlak gelijk aan de oppervlakte van dien driehoek, gedeeld door zes maal den inhoud van het viervlak.

Opmerkingen. 1. Door alle ribben gelijk aan a te stellen, vindt men voor den straal van het regelmatig viervlak $\frac{1}{4}a\sqrt{6}$.

2. Stelt men $b = c = a$, $q = r = p$, dan vindt men voor den straal eener regelmatige driezijdige pyramide, waarvan a de ribbe van het grondvlak en p de opstaande ribbe is:

$$\mathrm{R} = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{\frac{3}{3a^2 - p^2}},$$

3. Voor een viervlak, waarvan de overstaande ribben twee aan twee gelijk zijn aan a, b en c, vindt men

$$\mathrm{R} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\,(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

§ **185. Vraagstukken.**

1. Vier congruente driehoeken, waarvan de zijden 13, 14 en 15 zijn, sluiten een viervlak in. Bereken de standhoeken van dat viervlak.
2. Van een viervlak zijn drie in één hoekpunt samenkomende ribben 7, 8 en 9 M lang, terwijl die ribben twee aan twee hoeken van 75° maken. Bereken den inhoud van dat viervlak.
3. Van een viervlak ABCD is $AB = AC = AD = 6$, $BC = 7$, $CD = 8$, $DB = 9$. Bereken den inhoud.
4. Van een viervlak ABCD is $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$, $AD = 11$, $BD = 10$, $CD = 12$. Bereken den inhoud.
5. Van een driezijdige pyramide TABC is de hoogte 3 M, de openstaande ribbe $TA = 4$ M, terwijl deze met de ribben AC en AB hoeken maakt van $120^\circ 13''$ en $57^\circ 10' 12''$. Bereken de standhoeken op AC en AB.
6. Van een viervlak zijn drie in één hoekpunt samenkomende ribben a cM lang. Deze ribben maken twee aan twee een hoek α met elkaar. Als de inhoud $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$ cM^3 is, bereken dan α.
7. Van een viervlak OABC is $OA = 421{,}567$, $OB = 657{,}643$, $OC = 549{,}536$, $\angle\ BOC = 75^\circ 25' 39''$, $\angle\ COA = 98^\circ 9' 26''$, $\angle\ AOB = 54^\circ 43' 18''$. Bereken den inhoud.
8. Van een regelmatige vierzijdige pyramide maken de opstaande zijvlakken hoeken van 70° met het grondvlak. Bereken den standhoek op de opstaande ribbe.
9. Van een vierzijdige pyramide TABCD zijn de opstaande ribben even groot. Het grondvlak is een gelijkbeenig trapezium (AB//CD). Als $\angle\ ATB = \angle\ ATD = \angle\ BTC = 90^\circ$, en $\angle\ CTD = 60^\circ$ is, vraagt men de standhoeken op de opstaande ribben te bepalen.
10. Van een regelmatige vierzijdige pyramide zijn alle ribben $= a$. Bereken den standhoek op een opstaande ribbe. (Toel. Univ. 1911).
11. Van een regelmatige vierzijdige pyramide is de opstaande ribbe tweemaal zoo lang als de ribbe van het grondvlak. Bereken den standhoek op een opstaande ribbe. (Toel. Univ. 1909).
12. Van een vierhoekige pyramide TABCD is het grondvlak ABCD een ruit. Als nu $AD = 17{,}3$ M, $AC = 27{,}5$ M, $\angle\ TAD = 47^\circ 28' 20''$, $\angle\ TAB = 67^\circ 20' 10''$, vraagt men den hoek te bepalen, waaronder TA op het grondvlak helt.
13. Bereken de verschillende standhoeken, voorkomende aan een regelmatige vijfzijdige pyramide, waarvan alle ribben even groot zijn. (Toel. Univ. 1908).

14. Bereken de standhoeken van een regelmatige vijfzijdige pyramide, als de tophoeken der opstaande zijvlakken 36° zijn.

15. Van een regelmatige vijfzijdige pyramide is de tophoek van een opstaand zijvlak 72°. Bereken den hoek, dien een opstaande ribbe met het grondvlak maakt.

16. Van een regelmatige achtzijdige pyramide is de standhoek op een opstaande ribbe 165°. Hoe groot is de tophoek van een der opstaande zijvlakken?

17. Als S_p de standhoek van een regelmatig p-vlak is, dan is $\cos S_4 = \frac{1}{2}$, $\cos S_6 = o$, $\cos S_8 = -\frac{1}{3}$, $\cos S_{12} = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\cos S_{20} = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

18. Van een regelmatig veelvlak is a de ribbe, m het aantal ribben, dat in elk hoekpunt samenkomt, n het aantal ribben van elk zijvlak, S de standhoek, O de oppervlakte, I de inhoud. Bewijs, dat

$$O = \frac{mna^2 \cot \frac{\pi}{n}}{2(m+n)-mn}.$$

$$I = \frac{mna^3 \cot \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2}S}{6(2m+2n-mn)}.$$

19. Van een parallelopipedum zijn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ drie in één hoekpunt samenkomende ribben. Als $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$, bewijs dan, dat de lichaamsdiagonaal uit O is

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha + 2ca \cos \beta + 2ab \cos \gamma)},$$

20. Van een parallelopipedum zijn de ongelijke ribben 13, 20 en 25 M. Twee aan twee maken zij met elkander hoeken van 25°, 35° en 45°. Hoe groot is de inhoud van het lichaam?

21. Van een parallelopipedum maken 2 ribben van het grondvlak een hoek van 55°, terwijl de opstaande ribbe, die deze twee snijdt, met de eene een hoek van 70° en met de andere een hoek van 83° maakt. Bereken den hoek, dien de opstaande ribbe met het grondvlak maakt. (Toel. Univ. 1911).

22. Van een drievlakshoek zijn de zijden 60°, 70°, 80°. Men trekt binnen den drievlakshoek door het hoekpunt een lijn, die met de ribben gelijke hoeken maakt. Bereken die hoeken.

23. Twee vlakken maken een hoek S met elkaar. Uit een punt der doorsnede trekt men in elk vlak een lijn. De eene lijn maakt een hoek α, en de andere een hoek β met de doorsnede. Hoe

berekent men den hoek, dien de doorsnede met het vlak der twee lijnen maakt? (Toel. Univ. 1908).

24. Een lijn a helt op een vlak onder een hoek van $63°12'14''$. Door het voetpunt der lijn is in het vlak een lijn b getrokken, die met de projectie van a op het vlak een hoek van $127°15''$ maakt. Hoe groot is de hoek tusschen a en b?

25. Twee vlakken staan loodrecht op elkaar. Uit een punt P der doorsnede wordt in het eene vlak een lijn PQ en in het andere vlak een lijn PR getrokken, welke lijnen met de doorsnede achtereenvolgens hoeken van $32°14'29''$ en $53°4'8''$ maken. Bereken den hoek, dien de doorsnede met het vlak PQR maakt. (Toel. Univ. 1907).

B. Eenige toepassingen van de boldriehoeksmeting op de sterrenkunde.

§ 186. Den spherischen afstand van twee plaatsen op aarde te bepalen, waarvan de geographische lengten en breedten gegeven zijn.

In fig. 91 is P de noordpool, PG de nulmeridiaan (waarvoor hier en in 't vervolg die van Greenwich genomen wordt), terwijl A en B twee plaatsen op aarde zijn, waarvan de lengten zijn $GC = l_1$, $GD = l_2$, en de breedten $CA = b_1$, $DB = b_2$.

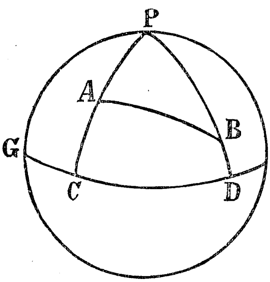


Fig. 91.

Van den boldriehoek PAB zijn nu bekend

$$PA = 90° - b_1, \quad PB = 90° - b_2,$$
$$\angle APB = l_2 - l_1.$$

Volgens den eersten cosinusregel is nu

$$\cos AB = \cos(90° - b_1)\cos(90° - b_2) + \sin(90° - b_1)\sin(90° - b_2)\cos(l_2 - l_1)$$
$$= \sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos b_2 \cos(l_2 - l_1).$$

Opmerkingen. 1. Voor de practische berekening kan de formule op de volgende wijze logarithmisch gemaakt worden

$$\cos AB = \sin b_2 \{\sin b_1 + \cos b_1 \cot b_2 \cos(l_2 - l_1)\}.$$

Stel nu $\cot b_2 \cos(l_2 - l_1) = \operatorname{tg} \varphi$, dan wordt $\cos AB = \sin b_2 (\sin b_1 +$
$+ \cos b_1 \operatorname{tg} \varphi) = \dfrac{\sin b_2 \sin(b_1 + \varphi)}{\cos \varphi}$.

2. Zijn A en B twee zeeplaatsen, zoodanig gelegen, dat men B uit A te water bereiken kan langs den grooten cirkel AB, en men

wenscht de *hoeken* van *afvaart* en *aankomst*, dat zijn de hoeken A en B van $\triangle$ PAB te berekenen, dan vindt men die met behulp der Nepersche analogiëen; ook de spherische afstand AB kan dan beter gevonden worden met een der formules van Neper of Delambre.

3. Heeft een der plaatsen, b.v. B, zuiderbreedte, dan moet die, om de zijde PB te verkrijgen, bij 90° worden opgeteld.

Voorbeeld. *Den spherischen afstand tusschen Petrograd* ($59^\circ 56' 30''$ N.B., $30^\circ 20' 30''$ O.L.) *en Rio Janeiro* ($22^\circ 54' 30''$ Z.B., $43^\circ 10' 30''$ W.L.) *te berekenen.*

Noemt men dezen afstand x, dan is

$$\cos x = -\sin 59^\circ 56' 30'' \sin 22^\circ 54' 30'' + \cos 59^\circ 56' 30'' \cos 22^\circ 54' 30'' \cos 73^\circ 31'.$$

$$= -\sin 22^\circ 54' 30'' (\sin 59^\circ 56' 30'' - \cos 59^\circ 56' 30'' \cot 22^\circ 54' 30'' \cos 73^\circ 31').$$

Stel $\cot 22^\circ 54' 30'' \cos 73^\circ 31' = \operatorname{tg} \varphi$, dan is

$$\cos x = \frac{-\sin 22^\circ 54' 30'' \sin (59^\circ 56' 30'' - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

$$\begin{array}{ll} \log \cot 22^\circ 54' 30'' & = 10,37408 - 10 \\ \log \cos 73^\circ 31' & = 9,45292 - 10 \\ \hline \log \operatorname{tg} \varphi & = 9,82700 - 10 \\ & \varphi = 33^\circ 52' 40''. \end{array}$$

$$\cos x = -\frac{\sin 22^\circ 54' 30'' \sin 26^\circ 3' 50''}{\cos 33^\circ 52' 40''}.$$

$$\begin{array}{ll} \log \sin 22^\circ 54' 30'' & = 9,59024 - 10 \\ \log \sin 26^\circ\ 3' 50'' & = 9,64284 - 10 \\ \hline & 9,23308 - 10 \\ \log \cos 33^\circ 52' 40'' & = 9,91919 - 10 \\ \hline \log \cos x & = 9,31389 - 10\ (n) \\ & x = 180^\circ - 78^\circ 7' \\ & x = 101^\circ 53', \end{array}$$

Neemt men voor den omtrek der aarde 40000 KM, dan vindt men voor den spherischen afstand Petrograd—Rio Janeiro ruim 11300 KM. In berekeningen als bovenstaande heeft het geen zin, de einduitkomsten in seconden nauwkeurig op te geven, wanneer men niet volkomen bepaalde plaatsen, b.v. kerktorens op het oog heeft. Dit blijkt, als men bedenkt, dat een boog van een grooten cirkel op aarde van $1''$ een gemiddelde lengte van 31 M heeft, dus een boog van $1'$ nog geen 2 KM.

Opmerking. Voor den zeevaarder is het van belang, het meest noordelijk gelegen punt van een gegeven grooten cirkel te bepalen. In dit punt, **vertex** genoemd, is de vaarrichting juist Oost-West, of omgekeerd. Men verkrijgt den vertex V voor den grooten cirkel AB (fig. 92), door uit P (de noordpool) den grooten cirkel PV loodrecht op AB neer te laten. Laten λ (de lengte) en β (de breedte) de elementen van den vertex zijn, dan is

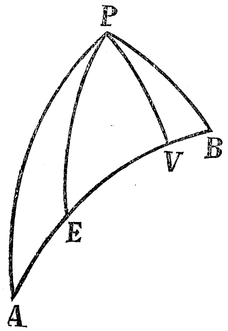


Fig. 92.

$$PV = 90° - \beta,\quad \angle APV = \gamma - l_1,\quad PA = 90° - b_1.$$

In den rechthoekigen driehoek APV is nu

$$\sin PV = \sin PA \sin PAV,$$

$$\text{of}\quad \mathbf{\cos\beta = \cos b_1 \sin PAV.}$$

Deze vergelijking leert ons de breedte β van den vertex kennen, nadat $\angle$ PAV uit den driehoek PAB is berekend.

Verder is in den driehoek APV

$$\cos PA = \cot APV \cot PAV,$$

$$\sin b_1 = \cot(\lambda - l_1) \cot PAV,$$

$$\text{of}\quad \mathbf{\cot(\lambda - l_1) = \sin b_1 \operatorname{tg} PAV.}$$

Door middel van deze vergelijking berekent men de lengte λ van den vertex.

Bepalen wij nu den vertex van den grooten cirkel Petrograd—Rio Janeiro.

In $\triangle$ PAB is

$$PA = 112°54'30'',\quad PB = 30°3'30'',\quad \angle P = 73°31'.$$

$\log\cos\frac{1}{2}(PB-PA)$	$= 9{,}87495-10$	$\log\sin\frac{1}{2}(PB-PA)$	$= 9{,}82062-10$
$\log\cot\frac{1}{2}P$	$=10{,}12670-10$	$\log\cot\frac{1}{2}P$	$=10{,}12670-10$
	$10{,}00165-10$		$9{,}94732-10$
$\log\cos\frac{1}{2}(PB+PA)$	$= 9{,}50185-10$	$\log\sin\frac{1}{2}(PB+PA)$	$= 9{,}97691-10$
$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+A)$	$=10.49980-10$	$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)$	$= 9{,}97041-10\,(n)$
$\frac{1}{2}(B+A)$	$=72°26'40''$	$\frac{1}{2}(B-A)$	$=43°3'$
$\frac{1}{2}(B-A)$	$=43°3'$		
A	$=29°23'40''$		
B	$=115°29'40''$		

$$\cos\beta = \cos 59°56'30'' \sin 64°30'20$$

$\log\cos 59°56'30''$	$= 9{,}69973 - 10$
$\log\sin 64°30'20''$	$= 9{,}95551 - 10$
$\log\cos\beta$	$= 9{,}65524 - 10$
β	$= 63°7'15''$

$$\begin{aligned}
\cos(\lambda - 30°20'30'') &= \cot\beta \operatorname{tg} 59°56'30''. \\
\log\cot 63°7'15'' &= 9{,}70490-10 \\
\log \operatorname{tg} 59°56'30'' &= 10{,}23754-20 \\
\hline
\log\cos(\lambda - 30°20'30'') &= 9{,}94244-10 \\
\lambda - 30°20'30'' &= 28°51'10'' \\
\lambda &= 59°11'40''.
\end{aligned}$$

Zijn de elementen van den vertex bepaald, dan kan men voor elk punt van den beschouwden grooten cirkel, waarvan de lengte bekend is, de breedte bepalen, en omgekeerd.

Is b.v. E (fig. 92) een punt, waarvan de oosterlengte $6°55'$ is (meridiaan van Keulen), dan is in driehoek PEV.

$$\angle \text{EPV} = \lambda - 6°55' = 52°16'40'', \quad \text{PV} = 90° - \beta.$$

$$\cos \text{EPV} = \cot\beta \cot \text{PE},$$

of als β_1 de gezochte breedte is

$$\cos \text{EPV} = \cot\beta \operatorname{tg}\beta_1,$$

dus $\operatorname{tg}\beta_1 = \cos \text{EPV} \operatorname{tg}\beta$.

$$\begin{aligned}
\log\cos \text{EPV} &= 9{,}78663-10 \\
\log\operatorname{tg}\beta &= 10{,}29510-10 \\
\hline
\log\operatorname{tg}\beta_1 &= 10{,}08173-10 \\
\beta_1 &= 50°21'30''.
\end{aligned}$$

Het bedoelde punt ligt derhalve ten westen van Koblenz op de meridiaan van Keulen.

§ 187. De drie coördinatenstelsels aan den hemelbol.

De plaats van een hemellichaam aan den hemelbol kan aangegeven worden door

1e azimuth en hoogte.

Is in fig. 93 M de standplaats van den waarnemer, ZWNO de horizon, MT de verticaal van M, S een hemellichaam, TSS$_h$ de hoogtecirkel of verticaalcirkel voor S, dan is SS$_h$ de *hoogte*, en de boog NOS$_h$ van den horizon, gemeten vanaf het noordpunt N tot het voetpunt S$_h$. het *azimuth* van S. Het azimuth is dus ook gelijk aan den *azimuthalen* hoek STN. Het beschouwde hemellichaam heeft *oostelijk* azimuth. Valt S$_h$ op den boog NWZ, dan heeft het *westelijk* azimuth. De boog ST is de *zenithsafstand* van S.

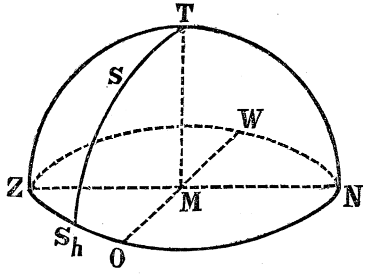


Fig. 93.

2e **uurhoek en declinatie.**

In fig. 94 is PM de hemelas, PN de poolshoogte voor de plaats van waarneming, AOA′W de hemelaequator, die in M loodrecht op MP staat, PTZ de meridiaancirkel voor het zenith. Voor het hemellichaam S is de declinatiecirkel PSS_a geteekend. SS_a is de *declinatie* (in de figuur *noordelijk*), ∠ TPS de *uurhoek.* Is de uurhoek nul, dan bereikt S zijn *bovenste culminatiepunt.*

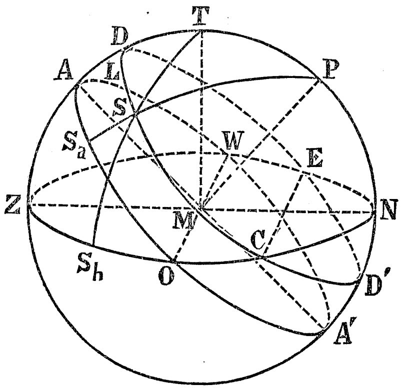


Fig. 94.

Is S een vaste ster, dan is haar schijnbare dagelijksche beweging een *parallelcirkel* CDED′, waarvan C en E resp. de punten van *opkomst* en *ondergang*, D en D′ resp. de *bovenste* en *onderste culminatiepunten* zijn.

De driehoek STP, waarvan de hoekpunten liggen in het beschouwde hemellichaam, het zenith en de hemelpool, heet *parallactische driehoek.* Zijn elementen zijn:

TP = de poolsafstand van het zenith = complement der poolshoogte = complement der geographische breedte van de plaats van waarneming.

PS = complement der declinatie SS_a.

ST = complement der hoogte SS_h.

∠S = de *parallactische hoek* der ster.

∠T = de *azimuthale hoek.*

∠P = de *uurhoek.*

De vaste sterren hebben een constante declinatie, maar een veranderlijken uurhoek. Om de plaats der vaste sterren aan den hemelbol door twee constante grootheden aan te geven, heeft men in den aequator een vast punt L (Lentepunt, in het sterrenbeeld „de Ram") aangenomen (fig. 94). De coördinaten van de ster S zijn dan de **rechte klimming** (Ascentio Recta) LS_a, die steeds vanaf het lentepunt als oorsprong wordt gemeten in tegengestelde richting van de dagelijksche beweging des hemels, en de reeds boven genoemde **declinatie** SS_a.

3e **astronomische lengte en breedte.**

In fig. 95 is AHA′L de hemelaequator, PP′ de hemelas. Alle vaste sterren beschrijven dus cirkels evenwijdig met het vlak AHA'L. Daar de rechte klimming der zon (die gemeten wordt vanaf L in de richting LAHA') elken dag met ongeveer 1° toeneemt, terwijl ook de declinatie verandert (tusschen $+23°27'28''$ en $-23°27'28''$), heeft de zon een eigen jaarlijksche beweging langs den grooten cirkel LEHE', de **ecliptica** genoemd, en wel in de richting LEHE'.

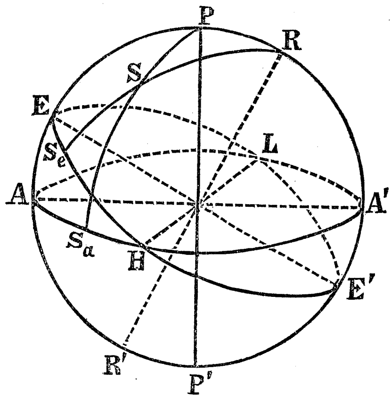


Fig. 95.

In E heeft de zon de grootste noorderdeclinatie $+23°27'28''$ (op 21 Juni), in E' de grootste zuiderdeclinatie $-23°27'28''$ (op 22 December). In L (op 20 Maart) en H (op 23 September) is de declinatie nul. De as RR' van de ecliptica snijdt den hemelbol in de *polen* R en R' der *ecliptica.* Is nu weer S een hemellichaam, waarvan LS_a de rechte klimming en SS_a de declinatie is, en trekt men den boog RSS_e door de pool der ecliptica en S, dan heet LS_e de *astronomische lengte* en SS_e de *astronomische breedte* van S. De driehoek PSR wordt *positiedriehoek* genoemd. Zijn elementen zijn

PR = helling der ecliptica op den aequator $= 23°27'28''$.
RS = complement der astronomische breedte SS_e.
SP = complement der declinatie SS_e.
$\angle P$ = de *ascentionale hoek* van S.
$\angle S$ = de *positiehoek* van S.
$\angle R$ = de *lengtehoek* van S.

§ **188. Bepaling van de astronomische lengte** (λ) **en breedte** (β) **eener ster, als gegeven zijn haar rechte klimming** (r) **en declinatie** (d).

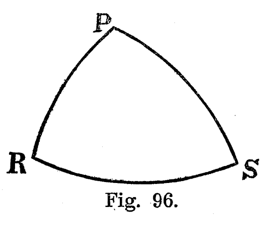


Fig. 96.

Zij gegeven $r = 50°24'$, $d = 29°40'$, terwijl de helling ε der ecliptica $23°27'28''$ is.

In den positiedriehoek PRS (fig. 96) is nu

$$PR = \varepsilon = 23°27'28'',$$
$$PS = 90° - d = 60°20'$$
$$RS = 90° - \beta,$$
$$\angle P = 90° + r = 140°24', \quad \angle R = 90° - \lambda.$$

Van dien driehoek zijn dus bekend twee zijden en de ingesloten hoek. De onbekende elementen worden derhalve gevonden door middel van de formules

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ - \lambda + S) = \frac{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - d - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - d + \varepsilon)} \cot \tfrac{1}{2}(90^\circ + r),$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ - \lambda - S) = \frac{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda - \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - d + \varepsilon)} \cot \tfrac{1}{2}(90^\circ + r),$$

$$\cot \tfrac{1}{2}(90^\circ - \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda - S)}{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda + S)} \cot \tfrac{1}{2}(90^\circ - d + \varepsilon).$$

Met de gegevens verkrijgt men dus hier

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ - \lambda + S) = \frac{\cos 18^\circ 26' 16''}{\cos 41^\circ 53' 44''} \cot 70^\circ 12',$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ - \lambda - S) = \frac{\sin 18^\circ 26' 16''}{\sin 41^\circ 53' 44''} \cot 70^\circ 12'.$$

$$\begin{array}{rl}
\log\cos 18^\circ 26' 16'' = & 9,97712-10 \\
\log\cot 70^\circ 12' = & 9,55633-10 \\ \hline
 & 9,53345-10 \\
\log\cos 41^\circ 53' 44'' = & 9,87179-10 \\ \hline
\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(40^\circ - \lambda + S) = & 9,66166-10 \\
\frac{1}{2}(90^\circ - \lambda + S) = & 24^\circ 38' 50'' \\
\frac{1}{2}(90^\circ - \lambda - S) = & 9^\circ 40' 36'' \\
90 - \lambda = & 34^\circ 19' 26'' \\
\lambda = & 55^\circ 40' 34''.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\sin 18^\circ 26' 16'' = & 9,50006-10 \\
\log\cot 70^\circ 12' = & 9,55633-10 \\ \hline
 = & 9,05639-10 \\
\log\sin 41^\circ 53' 44'' = & 9,82464-10 \\ \hline
\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^\circ - \lambda - S) = & 9,23175-10 \\
\frac{1}{2}(90^\circ - \lambda - S) = & 9^\circ 40' 36''
\end{array}$$

$$\cot \tfrac{1}{2}(90_\circ - \beta) = \frac{\cos 9^\circ 40' 36''}{\cos 24^\circ 38' 50''} \cot 41^\circ 53' 44''$$

$$\begin{array}{rl}
\log\cos 9^\circ 40' 36'' = & 9,99378-10 \\
\log\cot 41^\circ 53' 44'' = & 10.04716-10 \\ \hline
 & 10,04094-10 \\
\log\cos 24^\circ 38' 50'' = & 9,95851-10 \\ \hline
\log\cot \frac{1}{2}(90^\circ - \beta) = & 10,08243-10 \\
\frac{1}{2}(90^\circ - \beta) = & 39^\circ 35' 42'' \\
90^\circ - \beta = & 79^\circ 11' 24'' \\
\beta = & 10^\circ 48' 36''.
\end{array}$$

§ 189. Bepaling van het uur van opkomst en ondergang der zon.

Hoe laat komt voor München, op 48°9′ (b) geographische breedte gelegen, de zon op, als de noorderdeclinatie der zon 15°40′(d) bedraagt?

In fig. 97 is BA de parallelcirkel, die op den beschouwden dag door de zon wordt doorloopen. B is het opgangspunt, Is P de hemel-

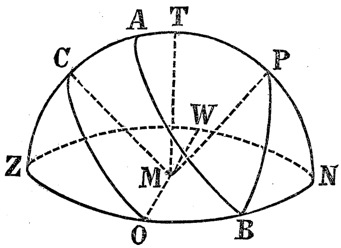


Fig. 97,

pool, dan is de boog PB het complement der declinatie, dus

$$PB = 90° - d.$$

De poolshoogte PN is gelijk aan de breedte, dus

$$PN = b.$$

Stelt men $\angle$ NPB gelijk aan u, dan is in den rechthoekigen boldriehoek PNB

$$\begin{aligned} \cos u &= \text{tg}\, b \cot (90° - d), \\ \text{of} \quad \cos u &= \text{tg}\, b\, \text{tg}\, d. \\ \log \text{tg}\, b &= 10{,}04785 - 10 \\ \log \text{tg}\, d &= 9{,}44787 - 10 \\ \hline \log \cos u &= 9{,}49572 - 10 \\ u &= 71°45'8''. \end{aligned}$$

Omdat de zon in 24 uur een boog van 360° doorloopt, beschrijft zij in 1 uur een boog van 15°. Het aantal uren, verloopen sedert de benedenste culminatie, is daarom

$$\frac{71°45'8''}{15°} \text{ uur} = 4 \text{ u. } 47 \text{ m.}$$

De zon gaat derhalve om 4 u. 47 m. op.

De beschouwde dag duurt $2 \times (12\, u - 4$ u. 47 m.$) = 14$ u. 26 m.

Opmerking. Dezelfde methode stelt ons in staat, uit de geographische breedte eener plaats de uren van opkomst en ondergang op den langsten en kortsten dag, en den duur van die dagen te berekenen, daar in het eerste geval de noorderdeclinatie der zon 23°27′28″ en in het tweede geval de zuiderdeclinatie 23°27′28″ is.

§ 190. Vraagstukken.

1. Twee plaatsen op aarde hebben beide 45° N.B. Hun lengteverschil is 90°. Hoeveel is de boog van den parallelcirkel tusschen beide plaatsen grooter dan de kleinste boog van den grooten cirkel, die door beide plaatsen gaat? Straal der aarde $= R$.
(Toel. Univ. 1912).
2. Een plaats heeft 52°20′ N.B. Op zekeren dag is de noorderdeclinatie der zon 12°40′ en haar azimuth 40°. Bereken de hoogte der zon en het uur van waarneming.
3. Bereken den spherischen afstand tusschen Rio Janeiro (21°55′ZB., 43°10′ W.L.) en Kaap de Goede Hoop (34°32′ Z.B. en 18°30′ O.L.)

4. Van twee plaatsen A en C op aarde is gegeven:
A: 15° N.B., 50°13′ O.L. C: 45° N.B., 140°13′ O.L.
Waar, en onder welken hoek, snijdt de groote cirkel AC in het oostelijk halfrond den aequator?
5. Van twee plaatsen op aarde A en B, waarvan B in den aequator ligt, is gegeven: A: 35° N.B., 60° O.L. B: 40° O.L. Bepaal lengte en breedte van den in het noordelijk halfrond gelegen vertex. (Toel. Univ. 1908).
6. Een plaats P op aarde heeft 20°30′ O.L. en 30°20′ N.B. Op den aequator liggen twee punten, die evenver van P verwijderd zijn, als de noordpool van P verwijderd is. Bepaal de lengten dier twee punten. (Toel. Univ. 1906).
7. Een waarnemer ziet op hetzelfde oogen twee bekende sterren boven den horizon verschijnen. Van de eene ster bedragen de rechte klimming en de declinatie α_1 en δ_1, van de andere ster α_2 en δ_2. Wordt gevraagd de breedte der plaats te berekenen, waar de waarnemer zich bevindt. (Examen Wisk, M. O. K_1, 1912).
8. Van een ster is de rechte klimming 67°40′30″, de declinatie 16°8′20″, Bereken astronomische lengte en breedte van die ster.
9. Op een plaats, waarvan de geographische breedte 51°17′30″ is, staat een toren, hoog 50 M. Op zekeren dag is de declinatie der zon 23°4′25″. Hoe lang is op dien dag 's morgens om 8 uur de schaduw van dien toren?
10. Van een ster is de hoogte 20°45′, het azimuth 48°20′ en de declinatie 8°54′. Bepaal den uurhoek der ster en de poolshoogte van de plaats van waarneming.
11. Op een plaats met 40°52′ N.B. neemt men een ster waar: hoogte 34°14′, azimuth 117°42′. Bereken uurhoek en declinatie.
12. Op zekeren dag gaat in Leipzig (51°20′ N.B.) de zon om 6 u. 8 m. onder. Bepaal voor dien nag de declinatie der zon.
13. Bepaal de duur van den kortsten dag voor Danzig (54°21′ N.B.)
14. Op welke breedte duurt de langste dag 18 uur?
15. Van een ster is de astronomische lengte 18°, de breedte (noordelijk) 25°40′. Bepaal declinatie en rechte klimming.
16. Bepaal de rechte klimming der zon, als haar declinatie 20°14′ is.
17. Bepaal den spherischen afstand van Berlijn (13°24′ O.L., 52°30′ N.B.) en Swakopmund (14°30′ O.L., 22°42′ Z.B.)
18. Bereken de declinatie der zon, wanneer zij opkomt te Halifax (44°39′ N.B., 63°37′ W.L.) en tegelijkertijd ondergaat te Hongkong (22°16′ N.B., 114°10′ O.L.)

X. AFLEIDING VAN FORMULES DER VLAKKE DRIEHOEKSMETING UIT DIE DER BOLDRIEHOEKSMETING.

§ **191.** De in de vorige hoofdstukken verkregen formules vertoonden vaak een in het oog loopende overeenkomst met die uit de vlakke driehoeksmeting. Het ligt daarom voor de hand, te onderzoeken, of er verband tusschen dergelijke formules bestaat, en welke wetten in dat geval de veranderingen der formules regelen. Dit na te gaan is het doel van dit hoofdstuk.

§ **192.** Om aan te toonen, dat inderdaad bolfiguren in vlakke figuren kunnen overgaan, neme men, als eenvoudig voorbeeld, een bol met daarop een boltweehoek. Is A een der hoekpunten van den tweehoek, en M het middelpunt van den bol, dan staat het raakvlak in A loodrecht op den straal MA. De vlakken, door de zijden van den boltweehoek aangebracht, snijden, ver genoeg verlengd, het raakvlak volgens twee lijnen, die met elkaar een hoek maken, die gelijk is aan den boltweehoek. Laat men het raakvlak met het daarin gelegen raakpunt A vast, en de straal van den bol steeds grooter worden, dan beweegt het middelpunt M zich langs de loodlijn in A op het raakvlak opgericht. Het boloppervlak in de omgeving van A nadert meer en meer tot het raakvlak, de zijden van den boltweehoek naderen meer en meer tot de raaklijnen in A, en door den bolstraal slechts groot genoeg te nemen, kan men het boloppervlak in de omgeving van A zoo weinig als men wil van het raakvlak laten afwijken, m.a.w. men kan het raakvlak beschouwen als de limietstand van het boloppervlak. De groote cirkels, die de zijden van den tweehoek vormden, worden daarbij getransformeerd in rechte lijnen, terwijl de hoek van den boltweehoek, zonder verandering van grootte, getransformeerd wordt in den hoek der beide raaklijnen.

Niet alleen de groote cirkels, die door het raakpunt A gaan, maar ook elke andere groote cirkel wordt in een rechte getransformeerd. Plaatst men n.l. in M een lichtbron, dan levert elke groote cirkel op het raakvlak in A een rechte als schaduw.

§ 193. Om nu formules van den vlakken driehoek af te leiden uit die van den boldriehoek, hebben wij de veranderingen van de goniometrische functies der zijden te onderzoeken, daar die der hoeken onveranderd blijven.

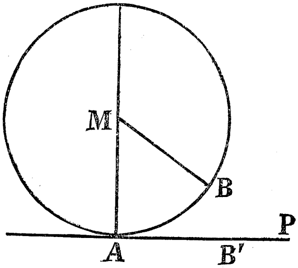


Fig. 98.

Zij in fig. 98 M een groote cirkel van den bol, AP de doorsnede van het raakvlak in A met het vlak van den grooten cirkel, en boog AB de zijde c van een boldriehoek ABC, uitgedrukt in lengtematen. Deze zijde gaat bij het oneindig groot worden van den straal over in de rechte AB', zoodat

$$\text{boog } AB = AB'.$$

Is nu γ de middelpuntshoek AMB en R de bolstraal, dan heeft men

$$\gamma : 2\pi = c : 2\pi R,$$

$$\gamma = \frac{c}{R}.$$

Omdat c constant is, en R oneindig groot wordt, nadert $\cos\gamma$ tot 1; $\sin\gamma$ en $\operatorname{tg}\gamma$ naderen echter beide tot nul. Substitueerde men daarom deze waarden rechtstreeks in een formule van den boldriehoek, dan zou men een onbepaald resultaat verkrijgen. De breuken

$$\frac{\sin\frac{c}{R}}{\frac{c}{R}} \text{ en } \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{R}}{\frac{c}{R}}$$

naderen echter bij constante c en onbepaald grooter wordende waarden van R tot 1, zoodat men ook heeft

$$\lim_{R=\infty} R \sin\frac{c}{R} = c, \quad \lim_{R=\infty} R \operatorname{tg}\frac{c}{R} = c. \text{*)}$$

*) Is in fig. 99 MAB een cirkelsector met straal 1 en een scherpen hoek φ, dan is, als BD $\perp$ MA en BC de raaklijn B is:

$$\triangle MBD < \text{sector } MAB < \triangle MBC.$$

$$\sin\varphi\cos\varphi < \varphi < \operatorname{tg}\varphi.$$

$$\cos\varphi < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi}, \text{ of}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi$$

Omdat $\lim\limits_{\varphi=0} \frac{1}{\cos\varphi} = \lim\limits_{\varphi=0} \cos\varphi = 1$, is ook

$$\lim \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$$

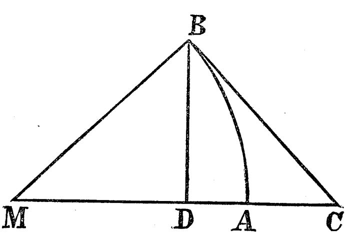


Fig. 99.

Verder is $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \times \frac{1}{\cos\varphi}$, dus $\lim\limits_{\varphi=0} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi} = \lim\limits_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$

Maken wij van deze eigenschap gebruik, om den overgang tot vlakke figuren duidelijk te maken.

§ 194. Formules voor den rechthoekigen driehoek.

Is C, evenals vroeger, de rechte hoek van een rechthoekigen boldriehoek, dan heeft men, de zijden door α, β, γ aanduidende:

1e $\sin\alpha = \sin\gamma \sin A$.

$$\sin\frac{a}{R} = \sin\frac{c}{R}\sin A.$$

$$\operatorname{Lim} R\sin\frac{a}{R} = \operatorname{Lim} R\sin\frac{c}{R}\sin A,$$

of $\underline{a = c\sin A.}$

2e $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta\cot B$.

$$\operatorname{Lim} R\sin\frac{a}{R} = \operatorname{Lim} R\operatorname{tg}\frac{b}{R}\cot B,$$

$\underline{a = b\cot B.}$

3e $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Deze formule gaat over in de indentiteit

$$1 = 1.$$

Door haar aldus te vervormen:

$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta$

$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$$R^2\sin^2\frac{c}{R} = R^2\sin^2\frac{a}{R} + R^2\sin^2\frac{b}{R} - \left(R^2\sin^2\frac{a}{R}\right)\left(R^2\sin^2\frac{b}{R}\right)\times\frac{1}{R^2},$$

verkrijgt men, tot de limiet overgaande:

$$c^2 = a^2 + b^2 - a^2b^2\lim\frac{1}{R^2},$$

of $\underline{c^2 = a^2 + b^2.}$

4e $\cos\gamma = \cot A\cot B$,

Hier verkrijgt men onmiddellijk

$$1 = \cot A\cot B,$$

$$\operatorname{tg} A = \cot B = \operatorname{tg}(90^\circ - B),$$

of $\underline{A + B = 90^\circ.}$

5e $\cos A = \operatorname{tg}\beta\cot\gamma$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma\cos A$,

$$\operatorname{Lim} R\operatorname{tg}\frac{b}{R} = \operatorname{Lim} R\operatorname{tg}\frac{c}{R}\cos A$$

of $\underline{b = c\cos A.}$

6e $\cos A = \cos a \sin B$.

Hier verkrijgt men weer onmiddellijk:

$$\cos A = \sin B,$$

$$\text{of} \quad \underline{A + B = 90°.}$$

De boven verkregen uitkomsten zijn bekende formules voor den rechthoekigen vlakken driehoek.

§ 195. Formules voor den scheefhoekigen driehoek.

1e *Sinusregel.*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

$$\lim \frac{R \sin \frac{a}{R}}{R \sin \frac{b}{R}} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

$$\underline{\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.} \quad \text{(Sinusregel voor den vlakken driehoek).}$$

2e *Eerste cosinusregel.*

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

Rechtstreeksche grensovergang voert tot de identiteit $1 = 1$. Daarom moet eerst herleid worden:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - (\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A)^2 \\ &= 1 - \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \cos^2 A \\ &\qquad - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma \cos A \\ &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \cos A \\ &\qquad - \sin^2 \beta \sin^2 \gamma - \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \cos^2 A. \end{aligned}$$

Vermenigvuldigt men nu met R^2, dan heeft men

$$\text{Lim } 2R^2 \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} \cos A = 2bc \cos A,$$

$$\begin{aligned} \text{Lim } R^2 \sin^2 \frac{b}{R} \sin^2 \frac{c}{R} &= \text{Lim} \left(R \sin \frac{b}{R}\right)^2 \left(R \sin \frac{c}{R}\right)^2 \times \frac{1}{R^2} \\ &= \text{Lim } \frac{b^2 c^2}{R^2} = o, \end{aligned}$$

$$\text{Lim } R^2 \sin^2 \frac{b}{R} \sin^2 \frac{c}{R} \cos^2 A = o,$$

terwijl het eerste lid tot a^2 en de beide eerste termen van het tweede lid tot $b^2 + c^2$ naderen.

Er komt dus

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.} \quad \text{(Cosinusregel der vl. driehoeksmeting).}$$

3e *Tweede cosinusregeling.*

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha,$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$$
$$= -\cos (B + C)$$
$$\underline{A + B + C = 180^\circ.}$$

4e *Tangensregel.*

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B).$$

$$R \operatorname{tg} \frac{\tfrac{1}{2}(a + b)}{R} : R \operatorname{tg} \frac{\tfrac{1}{2}(a - b)}{R} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B),$$

of tot de limiet overgaande

$$\underline{(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B).}$$

(Tangensregel der vlakke driehoeksmeting).

De voorgaande voorbeelden toonen aan, *dat men uit een formule der boldriehoeksmeting, die homogeen is ten opzichte van sinus en tangens van de zijden, een formule der vlakke driehoeksmeting verkrijgt, door weglating der woorden sin en tg, terwijl de cos eener zijde door 1 moet vervangen worden. Soms moet een vervorming der formule hieraan voorafgaan.* (Zie § 194, 3e, § 195, 2e)

Hier volgt nog een lijst van overeenkomstige formules, die de lezer thans gemakkelijk zal kunnen afleiden.

Formule der boldriehoeksmeting.	Afgeleide formule.
$\frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}c}.$	$A + B + C = 180^\circ.$
$\frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}c}.$	$\frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{a - b}{c}$ (Formule v. Mollweide.
$\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}c}.$	$A + B + C = 180^\circ.$
$\frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}c}.$	$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{a + b}{c}$ (Formule v. Mollweide).
$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)}.$	$A + B + C = 180^\circ.$
$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)}.$	$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)} = \frac{a - b}{a + b}.$
$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}.$	$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}C}.$
$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)}.$	$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}C}.$

$\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C.$

$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}.$

$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}.$

$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}}.$

$\sin A = \frac{2n}{\sin b \sin c}.$

$\operatorname{tg} R = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{n}.$

$\operatorname{tg} r = \frac{n}{\sin s}.$

$a = b \cos C + c \cos B.$

$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$

$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$

$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$

$2\,O = bc \sin A.$

$R = \frac{abc}{4\,O}.$

$r = \frac{O}{s}.$

§ **196.** Bij den overgang van het bolvlak tot het platte vlak kan men ook gebruik maken van de reeksontwikkelingen

$$\sin x = \frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \ldots .$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots .$$

De beide eerste gelden voor alle eindige waarden van x, de laatste voor

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Omdat bij de beschouwingen in dit hoofdstuk x een tot nul naderende waarde heeft, kan de laatste reeks zonder bezwaar gebruikt worden.

Het voordeel van deze reeksontwikkelingen ligt hierin, dat ze onmiddellijk een resultaat geven, waar de vroegere methode tot een identiteit voerde.

Voorbeeld.

Voor de mediaan van een boldriehoek heeft men de formule

$$2 \cos m_\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma = \cos \alpha + \cos \beta, \quad \text{of}$$

$$2\left\{1 - \frac{m_c^2}{2R^2} + \ldots\right\}\left\{1 - \frac{c^2}{8R^2} + \ldots\right\} = \left\{1 - \frac{a^2}{2R^2} + \ldots\right\} + \left\{1 - \frac{b^2}{2R^2} + \ldots\right\}.$$

Vermindert men beide leden met 2, verandert van teeken, en vermenigvuldigt met R^2, dan komt er

$$m_c^2+\frac{c^2}{4}+\frac{1}{R^2}\left\{\ldots\right\}=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{1}{R^2}\left\{\ldots\right\}.$$

De beide uitdrukkingen tusschen accoladen zijn grootheden, die een eindige limiet hebben voor toenemende waarden van R. Gaat men over tot de limiet, dan verkrijgt men

$$m_c^2+\tfrac{1}{4}c^2=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2),$$

gevende de bekende formule voor de zwaartelijn van een vlakken driehoek.

§ 197. Vraagstukken.

1. Leidt uit de volgende formules overeenkomstige voor den vlakken driehoek af:

a. $\sin h_a=\dfrac{2}{\sin a}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$.

b. $\operatorname{tg} R\cos\tfrac{1}{2}c\sin h_c=2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b$.

c. $\cos\gamma=\dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$.

(γ is de boog, die de middens van CA en CB verbindt).

d. $\operatorname{tg} b_a=\dfrac{2}{\sin(b+c)}\sqrt{\sin b\sin c\sin s\sin(s-a)}$.

Druk de bissectrix ook uit in 2 zijden en den ingesloten hoek, en transformeer deze formule.

e. $\sin a\cos b=\cos a\sin b\cos C+\sin c\cos B$.

f. $\cos a\sin AD+\cos b\sin BD=\cos CD\sin c$. (§ 98).

Hierin is D een punt op de zijde AB.

2. Leidt uit de formules van Cagnoli en van Lhuilier voor het spherisch exces de formules voor het oppervlak van een vlakken driehoek af.

3. Bewijs, dat de producten der tangenten van de stukken, waarin de spherische hoogtelijnen van een boldriehoek elkaar verdeelen, gelijk zijn, en leidt hieruit de overeenkomstige stelling voor de vlakke meetkunde af.

4. Als men door een vast punt P een veranderlijken grooten cirkel trekt, die een gegeven kleinen cirkel in A en B snijdt, dan is $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}PA\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}PB$ constant. Transformeer deze eigenschap in het platte vlak.

5. In een kleinen cirkel, waarvan R de spherische straal is, construeert men een regelmatigen boltienhoek, waarvan de zijde a is. Bewijs, dat

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \sin R \text{ is,}$$

en transformeer deze eigenschap in het platte vlak.

6. Als a, b. c, d de zijden van een bolvierhoek, f en g de diagonalen zijn, en p de verbindingsboog van de middens der diagonalen, dan is

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \tfrac{1}{2}f \cos \tfrac{1}{2}g \cos p.$$

Leidt hieruit de overeenkomstige stelling voor de vlakke meetkunde af.

7. Transformeer de eigenschappen van § 156 en § 157.

XI. EIGENSCHAPPEN VAN FIGUREN OP DEN BOL AFGELEID UIT VLAKKE FIGUREN.

§ 198. 1. Eigenschap. Als a, b en c de zijden zijn van een boldriehoek, dan is er steeds een vlakke driehoek mogelijk met de zijden $\sin \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$, $\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$.

Bewijs. Voor de bestaanbaarheid van den vlakken driehoek is noodig en voldoende, dat:

$$\sin \tfrac{1}{2}a < \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c + \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c \text{ en}$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a > \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c - \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c.$$

Nu is:
$$a < b + c$$
$$\tfrac{1}{2}a < \tfrac{1}{2}(b + c)$$

zoodat $\sin \frac{1}{2}a < \sin \frac{1}{2}(b + c)$, als $\frac{1}{2}(b + c)$ scherp of recht is. Wanneer $\frac{1}{2}(b + c)$ stomp is, heeft men

$$\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}(b + c) < 180^\circ$$
$$\tfrac{1}{2}a < 180^\circ - \tfrac{1}{2}(b + c)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a < \sin \tfrac{1}{2}(b + c).$$

Geheel algemeen dus:

$$\sin \tfrac{1}{2}a < \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c + \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c.$$

Verder:
$$a > b - c$$
$$\tfrac{1}{2}a > \tfrac{1}{2}(b - c)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a > \sin \tfrac{1}{2}(b - c)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a > \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c - \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c.$$

2. Eigenschap. In den vlakken driehoek met de zijden $\sin \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$, $\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$, is $\angle$ A tegenover de zijde $\sin \frac{1}{2}a$ gelijk $\angle \alpha$ van den boldriehoek.

Bewijs. In den vlakken driehoek heeft men:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \sin^2 \tfrac{1}{2}b \cos^2 \tfrac{1}{2}c + \cos^2 \tfrac{1}{2}b \sin^2 \tfrac{1}{2}c -$$
$$2 \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}b \times \sin \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c \cos \mathrm{A};$$
$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}b \cos^2 \tfrac{1}{2}c + 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}b \sin^2 \tfrac{1}{2}c - \sin b \sin c \cos \mathrm{A};$$
$$1 - \cos a = \tfrac{1}{2}(1 - \cos b)(1 + \cos c) +$$
$$\tfrac{1}{2}(1 + \cos b)(1 - \cos c) - \sin b \sin c \cos \mathrm{A}.$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}.$$

In den boldriehoek heeft men:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Hieruit volgt $\angle \mathrm{A} = \angle \alpha$.

3. Afleiding der formules voor $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $\cos \frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, $\sin \alpha$ enz. In den genoemden vlakken driehoek heeft men:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}; \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-b)}{\sin s \sin (s-a)}}.$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin b \sin c}.$$

Door middel van den pooldriehoek leiden wij nu de bekende formules af voor $\sin \frac{1}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}a$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$, $\sin a$, enz.

4. Eigenschap. In den vlakken driehoek met de zijden $\sin \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2} c$, $\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$ is $\angle$ B tegenover de zijde $\sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$ gelijk aan $\beta - \frac{1}{2}$ E; $\angle$ C tegenover de zijde $\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$ gelijk aan $\gamma - \frac{1}{2}$ E (β en γ hoeken van den boldriehoek, E 't spherisch excés, $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$).

Bewijs. $\sin B : \sin C = \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$:

$$\cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c = \frac{1}{\cos (\sigma - \alpha) \cos (\sigma - \gamma)} :$$

$$\frac{1}{\cos (\sigma - \alpha) \cos (\sigma - \beta)} = \cos (\sigma - \beta) : \cos (\sigma - \gamma) =$$

$$\cos \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \beta\right) : \cos \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \gamma\right) = \cos (\tfrac{1}{2}E + 90^\circ - \beta) :$$

$$\cos (\tfrac{1}{2} E + 90^\circ - \gamma) = \sin (\beta - \tfrac{1}{2} E) : \sin (\gamma - \tfrac{1}{2} E).$$

Nu volgt uit de betrekking:

$$\sin B : \sin C = \sin (\beta - \tfrac{1}{2} E) : \sin (\gamma - \tfrac{1}{2} E)$$

in verband met $B + C = \beta + \gamma - E$, dat

$$\angle B = \beta - \tfrac{1}{2} E \text{ en } \angle C = \gamma - \tfrac{1}{2} E.$$

5. Afleiding der formules voor $\sin\left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{E}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{E}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{E}{4}\right)$, $\sin\left(\gamma - \frac{E}{2}\right)$ enz.

In den vlakken driehoek gelden de volgende formules:

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{E}{4}\right) = \sqrt{\frac{\cos \frac{s}{2} \sin \frac{s-a}{2} \sin \frac{s-b}{2} \cos \frac{s-c}{2}}{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}}.$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{E}{4}\right) = \sqrt{\frac{\sin \frac{s}{2} \cos \frac{s-a}{2} \cos \frac{s-b}{2} \sin \frac{s-c}{2}}{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{E}{4}\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}}.$$

$$\sin\left(\gamma-\frac{E}{2}\right)=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Door middel van den pooldriehoek leiden we nog af:

$$\sin\frac{s-c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{E}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{E}{4}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{E}{4}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{E}{4}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}}.$$

$$\cos\frac{s-c}{2}=\sqrt{\frac{\cos\frac{E}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{E}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{E}{4}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{E}{4}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}E\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{E}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{E}{4}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{E}{4}\right)}$$

$$\sin(s-c)=\frac{\sqrt{\sin\frac{E}{2}\sin\left(\alpha-\frac{E}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{E}{2}\right)\sin\left(\gamma-\frac{E}{2}\right)}}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

6. Eigenschap. Als a, b en zijden zijn van een boldriehoek, dan is er steeds een vlakke driehoek mogelijk met de zijden $\cos\frac{1}{2}c$, $\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$.

Bewijs. Voor de bestaanbaarheid van den vlakken driehoek is noodig en voldoende, dat,

$$\cos\tfrac{1}{2}c<\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b \text{ en}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}c>\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b,$$

Nu is: $c>a-b$

$$\tfrac{1}{2}c>\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}c<\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b.$$

Ook: $c<a+b$

$$\tfrac{1}{2}c<\tfrac{1}{2}(a+b)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}c>\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b.$$

7. Eigenschap. In den vlakken driehoek met de zijden $\cos\frac{1}{2}c$, $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, $\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$ is $\angle$ C tegenover de zijde $\cos\frac{1}{2}c$ gelijk aan 't supplement van $\angle\gamma$ van den boldriehoek.

Bewijs. In den vlakken driehoek heeft men:

$$\cos^2\tfrac{1}{2}c=\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b+\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b-$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos C.$$

$$1 + \cos c = \tfrac{1}{2}(1 + \cos a)(1 + \cos b) + \tfrac{1}{2}(1 - \cos a)(1 - \cos b) - \sin a \sin b \cos C.$$

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C.$$

In den boldriehoek heeft men:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Hieruit volgt $\angle C = 180° - \gamma$.

8. Eigenschap. In den vlakken driehoek met de zijden $\cos \frac{1}{2}c$, $\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b$, $\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b$ is $\angle$ A tegenover de zijde $\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b$ gelijk aan $\gamma - \frac{1}{2}$ E en $\angle$ B tegenover de zijde $\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b$ gelijk aan $\frac{1}{2}$ E.

Bewijs. $\sin A : \sin B = \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b : \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b = \cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b : 1 = \cos(\sigma - \gamma) : -\cos \sigma$ of:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma}{\cot(\sigma - \frac{1}{2}\gamma)}.$$

Daar nu $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\gamma$, heeft men ook: $90° - \frac{1}{2}(A - B) = \sigma - \frac{1}{2}\gamma$ of $A - B = \gamma - E$, en dus $A = \gamma - \frac{1}{2}E$ en $B = \frac{1}{2}E$.

9. Afleiding der formules voor $\sin \frac{1}{2}E$, $\operatorname{tg} \frac{1}{4}E$. In den vlakken driehoek met de zijden $\cos \frac{1}{2}c$, $\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b$, $\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b$ hebben wij nu onmiddellijk:

$$\sin \tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(s-c)}.$$

10. Bijzondere gevallen: *a*. Rechth. boldriehoek. Nu wordt in den vlakken driehoek $\angle C = 90°$, $\angle B = \frac{1}{2}E$ en $\angle A = 90° - \frac{1}{2}E$. Dus: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}E = \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b$.

b. Boldriehoek, waarin $\gamma = \alpha + \beta$. Nu wordt in den vlakken driehoek $\angle B = \gamma - \frac{1}{2}E = 90°$, zoodat $\sin \frac{1}{2}E = \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b$.

c. Bolrechthoek. (Gelijke overstaande zijden en gelijke hoeken). Nu wordt in den vlakken driehoek, die met de helft van den bolrechthoek overeenkomt $\angle B = \frac{1}{4}E$ en $\angle A = \gamma - \frac{1}{4}E = 90°$. Derhalve $\sin \frac{1}{4}E = \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b$.

11. Eigenschap. Een boldriehoek met 2 constante zijden is 't grootst als de ingesloten hoek gelijk is aan de som der twee andere hoeken. (Zie § 42).

Bewijs. De boldriehoek zal een maximum zijn, als $\angle B = \frac{1}{2}E$ in den vlakken driehoek een maximum is. Beschouw nu $BC = \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b$ vast, beschrijf uit C met $\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b$ als straal een cirkel, dan is 't duidelijk, dat $\angle B = \frac{1}{2}E$ een maximum wordt, als $\cos \frac{1}{2}c$ raakt aan dien cirkel. Maar dan wordt $\gamma - \frac{1}{2}E = 90°$ of $2\gamma = 180 + E$ of $\gamma = \alpha + \beta$.

12. Eigenschap. In een boldriehoek met de zijden a, b en c en den rechten hoek α heeft men de eigenschap $\sin^2 \frac{1}{2}a = \sin^2 \frac{1}{2}b \cos^2 \frac{1}{2}c + \cos^2 \frac{1}{2}b \sin^2 \frac{1}{2}c$.

Bewijs. In den vlakken driehoek met de zijden $\sin \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$, $\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$ wordt in dit geval $\angle A = \alpha = 90°$. Volgens Pythagoras hebben wij dus onmiddellijk:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \sin^2 \tfrac{1}{2}b \cos^2 \tfrac{1}{2}c + \cos^2 \tfrac{1}{2}b \sin^2 \tfrac{1}{2}c.$$

13. Als in bijgaande figuur 100 de zijden der driehoeken PQR en PST de daarbij aangegeven lengten hebben, dan zullen RS en

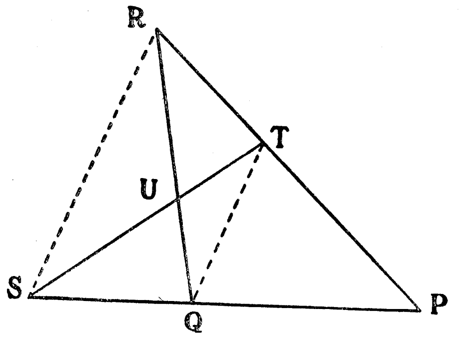


Fig. 100.

$PS = \cos \frac{1}{2}a$.
$PT = \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$.
$ST = \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$.
$PQ = \sin \frac{1}{2}c$.
$RQ = \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}a$.
$PR = \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}a$.

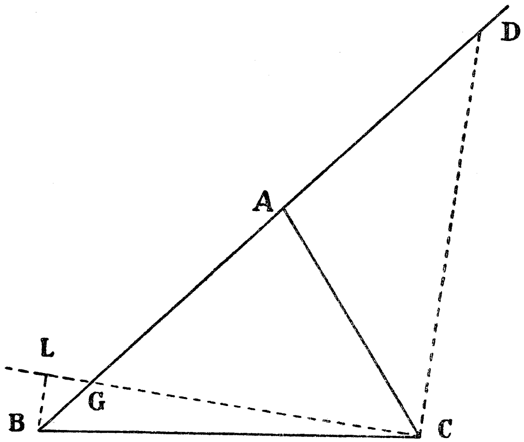
TQ evenwijdig loopen, daar de genoemde driehoeken even groot zijn. Wij kunnen dus de zijden berekenen van driehoek UTR, waarvan de hoeken zijn $U = \beta - E$, α en γ en vinden $RT = \sin \frac{1}{2}b (\cos \frac{1}{2}a - \sin \frac{1}{2}c)$, $RU = \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a : (\cos \frac{1}{2}a + \sin \frac{1}{2}c)$, $UT = \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c : (\cos \frac{1}{2}a + \sin \frac{1}{2}c)$. De hoeken $\beta - E$, α en γ komen dus ook voor in den met dezen gelijkvormigen driehoek, wiens zijden zijn $\sin \frac{1}{2}b (\cos a + \cos c)$, $\sin a \cos \frac{1}{2}b$, $\sin c \cos \frac{1}{2}b$.

14. De *tangensregel* uit een vlakke figuur. Zij nu ABC (fig. 101) een driehoek met de hoeken α, $\beta - E$ en γ en de zijden $\sin a \cos \frac{1}{2}b$, $\sin \frac{1}{2}b (\cos a + \cos c)$, $\sin c \cos \frac{1}{2}b$. Passen wij op dezen driehoek den tangensregel der vlakke driehoeksmeting toe, dan volgt:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)} = \frac{\cos \frac{1}{2}b (\sin a + \sin c)}{\cos \frac{1}{2}b (\sin a - \sin c)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - c)}.$$

Hierbij is verondersteld $\cos \frac{1}{2}a > \sin \frac{1}{2}c$ of $a + c < 180°$. Is $\cos \frac{1}{2}a < \sin \frac{1}{2}c$, dan komt men tot een driehoek met de hoeken $E - \beta$, $180° - \alpha$, $180° - \gamma$ en kan dezelfde redeneering toepassen. Verder heeft men nog 't geval $\cos \frac{1}{2}a = \sin \frac{1}{2}c$ of $a + c = 180°$.

15. **De formules van Delambre** uit een vlakke figuur. Zij ABC (fig. 101) een vlakke driehoek met de hoeken $\alpha, \beta - \frac{1}{2}E, \gamma - \frac{1}{2}E$ en de zijden $\sin \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$, $\cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$.



$AB = \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c.$
$AC = \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c.$
$BC = \sin \frac{1}{2}a.$

Fig. 101.

Neem AD = AG = AC, verbind C met G en laat uit B de loodlijn BL neer op CG, dan is

$$GL = (\cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c - \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c) \sin \tfrac{1}{2}\alpha;$$
$$CL = \sin \tfrac{1}{2}(b+c) \sin \tfrac{1}{2}a; \; BL = \sin \tfrac{1}{2}(b+c) \cos \tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\angle BCL = \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta).$$

In driehoek BCL hebben wij nu:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(c-b) \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}a}$$

of

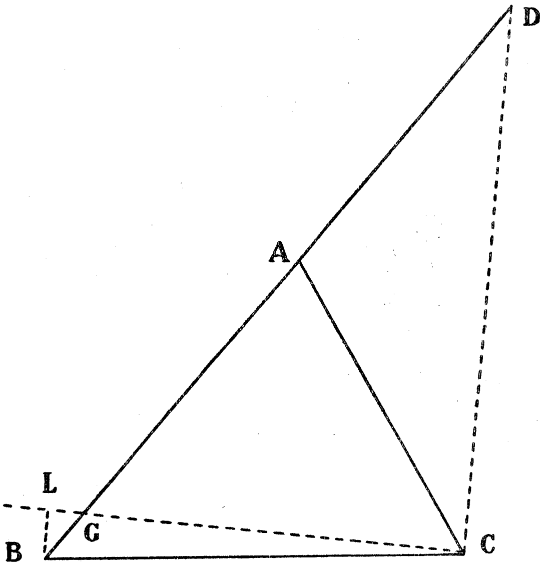
$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2}(c-b)}{\sin \frac{1}{2}a};$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}a} \text{ of } \frac{\cos \frac{1}{2}(\gamma - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}a},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(c-b)}{\sin \frac{1}{2}(b+c)} \cot \tfrac{1}{2}\alpha.$$

16. Passen wij dezelfde redeneering toe op driehoek ABC met met de hoeken $180 - \alpha$, $\frac{1}{2}E$ en $\alpha - \frac{1}{2}E$ en de zijden $\cos \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$, $\cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c$, dan vinden wij een rechth. driehoek BCL, waarin $\angle CBL = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $LC = \cos \frac{1}{2}(b-c) \cos \frac{1}{2}\alpha$, $BL = \cos \frac{1}{2}(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha$. (Fig. 102).

Hieruit lezen we af:



AB $= \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c.$
AB $= \cos\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c.$
BC $= \cos\frac{1}{2}a.$

Fig. 102.

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}a} \text{ of } \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}a} \text{ of } \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}\alpha.$$

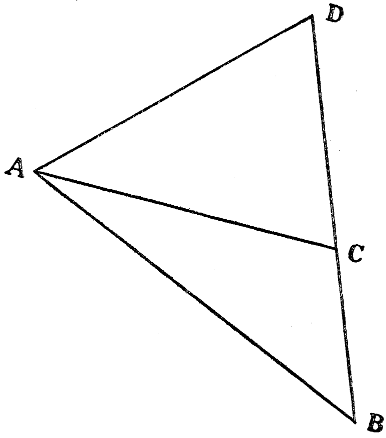
17. Zij ABCD een bolvierhoek met de hoeken α, β, γ en δ beschreven in een kleinen cirkel. Zij AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, AC $= e$, dan kunnen wij twee vlakke driehoeken construeeren ACD en ACB, (Fig. 103) waarin AC $= \cos\frac{1}{2}e$,

$$\text{AD} = \cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d,\ \text{CD} = \sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d,$$
$$\text{AB} = \cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b,\ \text{BC} = \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b,$$

terwijl B en D aan verschillenden kant van AC komen te liggen. De twee driehoeken vormen dan slechts één driehoek ABD, omdat $\angle$ ACD $+ \angle$ ACB $= \beta + \gamma - \frac{1}{2}$E $= 180°$ (E 't spherisch exces van den bolvierhoek). Verder is $\angle$ DAB $= \frac{1}{2}$E.

18. Uit dezen driehoek kunnen wij nu verschillende formules afleiden, bij voorbeeld:

$$\sin\tfrac{1}{4}E = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}.$$



$AB = \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b.$
$BC = \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b.$
$CD = \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d.$
$DA = \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d.$
$AC = \cos \frac{1}{2}c.$

Fig. 103.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c) \sin \frac{1}{2}(s-d)}{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-a-d) \cos \frac{1}{2}(s-b-d) \cos \frac{1}{2}(s-c-d)}}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(s-c) \sin \frac{1}{2}(s-d) \cos \frac{1}{2}(s-b-d) \cos \frac{1}{2}(s-b-c)}{\sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-c-d)}}.$$

Voor den bolvierhoek, waarin en waarom een kleine cirkel kan worden beschreven, heeft men o.a.:

$$\sin \tfrac{1}{4}E = \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}d}.$$

XII. DE STELLING VAN LEGENDRE.

§ 199. **Eigenschap. Een boldriehoek met de hoeken A, B, C en de zijden *a*, *b*, *c*, die ten opzichte van den straal des bols zeer klein zijn, komt overeen met een vlakken driehoek, wiens zijden *a*, *b*, *c* lang zijn en waarvan de hoeken groot zijn,**

$$\mathbf{A - \tfrac{1}{3} E,\ B - \tfrac{1}{3} E,\ C - \tfrac{1}{3} E.}$$

Bewijs. Het is duidelijk, dat a hier voorstelt de lengte van een zijde des boldriehoeks, niet in graden uitgedrukt, maar in Meters bijvoorbeeld. Willen wij dus gebruik maken van onze formules, dan moeten wij overal voor a, b, c in de plaats zetten $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, als r de bolstraal is. Wij krijgen op die manier de zijden van den boldriehoek uitgedrukt in radialen en kunnen schrijven:

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}} \quad \ldots\ldots (1).$$

Hierin zijn nu a, b, c zeer klein ten opzichte van den straal r. Voor het bewijs van bovengenoemde eigenschap moeten we gebruik maken van twee reeksen uit de hoogere algebra. Deze zijn:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots$$

Bij benadering hebben wij dus:

$$\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{1.2.r^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4.r^4};\ \sin\frac{a}{r} = \frac{a}{r} - \frac{a^3}{1.2.3.r^3}$$

$$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{1.2.r^2} + \frac{b^4}{1.2.3.4.r^4};\ \sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{1.2.3.r^3}$$

$$\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{1.2.r^2} + \frac{c^4}{1.2.3.4.c^4};\ \sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{1.2.3.r^3}.$$

Substitutie van deze waarden in (1) geeft, na weglating van de termen, die ten opzichte van $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ en $\frac{c}{r}$ van meer dan den 4^{den} graad zijn:

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2-c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2}{6r^2}-\frac{c^2}{6r^2}\right)}$$

Na vermenigvuldiging van deeltal en deeler in het 2^{de} lid met

$$1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}$$

en herleiding komt:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2\,b^2-2a^2\,c^2-2b^2\,c^2}{2\,4\,b\,c\,r^2}$$

Zij nu α de hoek tegenover de zijde a in den vlakken driehoek met de zijden a, b, c, dan is:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{2a^2\,b^2+2b^2\,c^2+2a^2\,b^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2\,c^2}$$

zoodat $\cos A = \cos\alpha - \frac{b\,c}{6\,r^2}\sin^2\alpha \; . \; . \; . \; . \; . (2).$

$\angle A$ is dus grooter dan $\angle\alpha$ en daarom stellen wij $A = \alpha + x$, of $\cos A = \cos(\alpha + x) = \cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x = \cos\alpha - \sin\alpha \times x$ (3), waarbij wij het laatste vinden door voor $\cos x$ en $\sin x$ gebruik te maken van de genoemde reeksen en in het oog te houden, dat x een zeer kleine grootheid voorstelt. Uit (2) en (3) volgt nu

$$x = \frac{b\,c\sin\alpha}{6\,r^2} = \frac{O}{3r^2},$$

waarin O voorstelt het oppervlak van den vlakken driehoek. Wij hebben dus:

$$A = \alpha + \frac{O}{3r^2},\quad B = \beta + \frac{O}{3r^2},\quad C = \gamma + \frac{O}{3r^2} \quad \text{of:}$$

$$\alpha = A - \frac{O}{3r^2},\quad \beta = B - \frac{O}{3r^2},\quad \gamma = C - \frac{O}{3r^2}.$$

$\frac{O}{r^2}$ stelt dan met een hoogen graad van nauwkeurigheid het spherisch exces van den boldriehoek voor.

§ **200. Toepassing.** Wil men nu een boldriehoek berekenen uit zijn 3 zijden, die ten opzichte van den straal des bols zeer klein zijn, dan berekent men eerst het oppervlak en de hoeken van den vlakken driehoek, wiens zijden even lang zijn. Bij elk der hoeken telt men daarna op $\frac{O}{3r^2} = \frac{1}{3}E$, dan heeft men A, B en C.

Zijn gegeven a, b en C, dan bepaalt men eerst $\frac{1}{2} a\, b \sin C$ en neemt die gevonden waarde voor O aan. Daaruit volgt E en $\gamma = C - \frac{O}{3r^2}$. Daarna kan men den vlakken driehoek berekenen en dan den boldriehoek. Zijn gegeven c A en B, dan make men gebruik van de formule

$$O = \tfrac{1}{2}c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)}$$

door A en B te beschouwen als hoeken van den vlakken driehoek. Daaruit volgt dan bij benadering E en vervolgens $\alpha = A - \frac{1}{3}E$, $\beta = B - \frac{1}{3}E$. Nu kan men den vlakken driehoek oplossen en dan den boldriehoek enz. Het is verder gemakkelijk in te zien, dat de stelling van Legendre ook bruikbaar is om een driehoek op te lossen met 2 zijden, die weinig van 180° verschillen, door gebruik te maken van den nevendriehoek op de 3$^{\text{de}}$ zijde. Als 2 hoeken zeer klein zijn, dan zijn in den pooldriehoek twee zijden weinig verschillend van 180° en komt men dus op het voorgaande geval terug.

XIII. HARMONISCHE VERDEELING EN HARMONISCHE STRALENBUNDELS. POOL EN POOLLIJN.

§ **201.** Volgens Menelaus hebben wij (fig. 104)

$$\frac{\sin aB}{\sin aC} \times \frac{\sin bC}{\sin bA} \times \frac{\sin c_1A}{\sin c_1B} = 1.$$

Volgens Ceva:

$$\frac{\sin aB}{\sin aC} \times \frac{\sin bC}{\sin bA} \times \frac{\sin cA}{\sin cB} = -1.$$

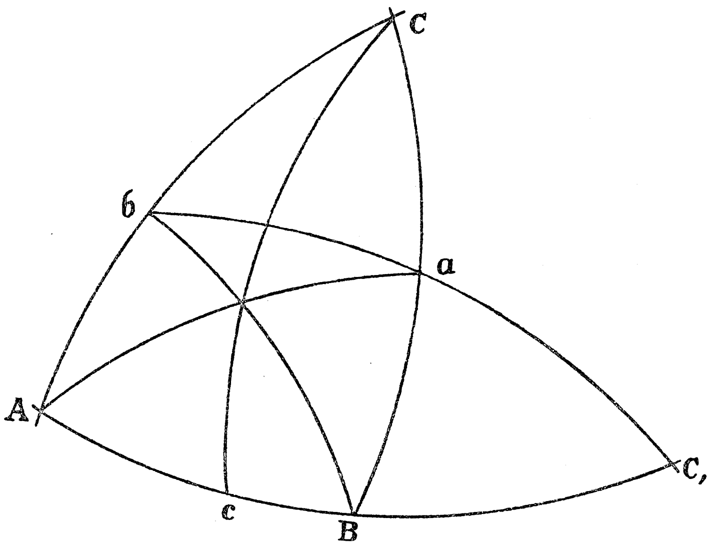


Fig. 104.

Hieruit volgt:

$$\frac{\sin cA}{\sin cB} = -\frac{\sin c_1A}{\sin c_1B}.$$

Bij deze gelijkheid zegt men, dat AB in de punten c en c_1 harmonisch verdeeld is.

Verbinden wij nog C met c_1 dan gaan van C uit de 4 groote cirkels CA, CB, Cc en Cc_1. Tusschen de hoeken dezer lijnen, bestaat de volgende betrekking:

$$\frac{\sin cCA}{\sin cCB} = -\frac{\sin c_1CA}{\sin c_1CB}.$$

Dit blijkt als volgt:

$$\sin cA = \sin cCA \sin CA : \sin c.$$

$$\sin cB = \sin cCB \sin CB : \sin c.$$

$$\frac{\sin cA}{\sin cB} = \frac{\sin cCA \sin CA}{\sin cCB \sin CB}.$$

Eveneens:

$$\frac{\sin c_1A}{\sin c_1B} = \frac{\sin c_1CA \sin CA}{\sin c_1CB \sin CB},$$ waaruit het gestelde volgt.

Men zegt nu, dat CA, CB, Cc en Cc_1 een harmonischen stralenbundel vormen. Een harmonische stralenbundel wordt door groote cirkels in harmonisch gelegen punten gesneden.

Is $cA = cB$, dan heeft men:

$$\sin\left(c_1C + \frac{AB}{2}\right) = \sin\left(c_1C - \frac{AB}{2}\right)$$

waaruit volgt $c_1c = 90°$ of $= 270°$.

Het verwante punt van het midden eener lijn AB ligt dus op een afstand van 90° links of rechts van het midden.

Ook volgt uit $\angle\, cCA = \angle\, cCB,$

$$\angle\, cCc_1 = 90°,$$

Als dus bij een harmonischen stralenbundel een straal den hoek tusschen twee andere stralen middendoor deelt, dan staat de verwante straal loodrecht op den eersten en omgekeerd. Uit de figuur blijkt verder de **eigenschap: Twee overstaande zijden van een volledige vierzijde vormen een harmonischen stralenbundel met de diagonaal, die door het snijpunt dier 2 zijden gaat en de lijn, die dat punt vereenigt met het snijpunt der andere diagonalen.**

Zij M het midden van AB en stellen wij $Mc = m$ en $MC_1 = m_1$ dan hebben wij:

$$\frac{\sin\left(\frac{AB}{2} + m\right)}{\sin\left(\frac{AB}{2} - m\right)} = \frac{\sin\left(m_1 + \frac{AB}{2}\right)}{\sin\left(m_1 - \frac{AB}{2}\right)}.$$

Hieruit volgt $$\mathbf{tg}^2 \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{2}} = \mathbf{tg}\, m \times \mathbf{tg}\, m_1.$$

§ **202.** Zij nu M het spherisch middelpunt van een kleinen cirkel (fig. 105), P_1 een willekeurig punt en P_1M een snijlijn, die door het middelpunt gaat, P het 4de harmonische punt tot A_1, B en P_1, $MA = r$, $MP = m$, $MP_1 = m_1$, dan heeft men:

$$\operatorname{tg}^2 r = \operatorname{tg} m \operatorname{tg} m_1.$$

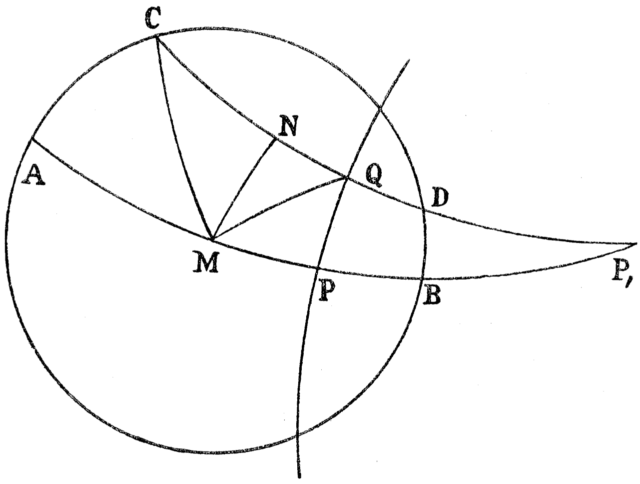


Fig. 105.

Voor een willekeurige andere snijlijn door P_1 gaande vindt men $\operatorname{tg}^2 r_1 = \operatorname{tg} n \operatorname{tg} n_1$. De groote cirkel, die Q met P verbindt, zal nu in P loodrecht staan op P_1M. Dit zal toch het geval zijn als

$$\frac{\cos P_1Q}{\cos P_1P} = \frac{\cos MQ}{\cos MP} \text{ of}$$

$$\frac{\cos (n_1 - n)}{\cos (m_1 - m)} = \frac{\cos r \cos n}{\cos r_1 \cos m}.$$

$$\frac{\cos n_1 (1 + \operatorname{tg} n \operatorname{tg} n_1)}{\cos m_1 (1 + \operatorname{tg} m \operatorname{tg} m_1)} = \frac{\cos r}{\cos r_1}$$

$$\frac{\cos r_1 (1 + \operatorname{tg}^2 r_1)}{\cos r (1 + \operatorname{tg}^2 r)} = \frac{\cos r}{\cos r_1}$$

$$\cos^2 r_1 + \sin^2 r_1 = \cos^2 r + \sin^2 r.$$

Trekt men dus door een punt van het boloppervlak alle bogen, die een kleinen cirkel snijden en construeert men het met beide snijpunten en het gegeven punt vierde harmonische punt, dan is de meetkundige plaats van deze punten een groote cirkel, die loodrecht staat op de middellijn, gaande door het gegeven punt. Dezen grooten cirkel noemt men de poollijn voor het gegeven punt ten opzichte van den kleinen cirkel. Het punt zelf noemt men dan de pool. Uit $\operatorname{tg}^2 r = \operatorname{tg} m \operatorname{tg} m_1$ volgt voor $m = 0$: $m_1 = 90°$ en omgekeerd.

De poollijnen van alle punten van een grooten cirkel gaan door de pool van dien cirkel en omgekeerd liggen de polen van alle groote cirkels, die door een zelfde punt gaan op de poollijn van dat punt. Iedere figuur op het oppervlak van den bol, uit groote cirkels bestaande, heeft dus haar poolfiguur ten opzichte van een kleinen cirkel. Iedere groote cirkel komt daarbij met een punt overeen en omgekeerd. Punten in de eene figuur, die op een grooten cirkel liggen, komen in de andere overeen met groote cirkels, die door één punt gaan.

De poollijn voor een punt op den omtrek van den kleinen cirkel is de raaklijn in dat punt. Het snijpunt van twee raaklijnen is de pool van de raakkoorde. De poolfiguur van een in een cirkel beschreven veelhoek is dus de bijbehoorende omgeschreven veelhoek.

Is een dubbelverhouding niet gelijk aan -1, dan noemt men haar een anharmonische verhouding. Gemakkelijk bewijst men de **eigenschap.**

Een bundel van 4 groote cirkels snijdt een willekeurigen grooten cirkel in punten, waarvan de dubbelverhoudingen constant zijn. Hoe men de voorgaande theorie kan toepassen, blijkt uit het volgende.

§ **203. Eigenschap. De diagonalen van een omgeschreven vierhoek en de verbindingslijnen der raakpunten van de overstaande zijden gaan alle vier door één punt. (Newton).** (fig. 106).

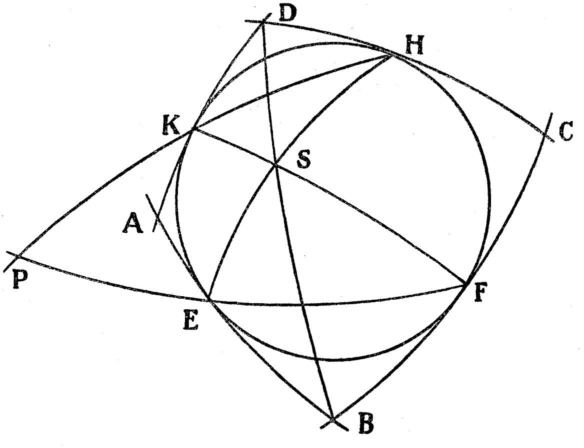


Fig. 106.

Bewijs.

EF en HK snijden elkaar in P. Daar de punten P, E en F op een grooten cirkel liggen, gaan hun poollijnen door een punt. De poollijnen van E en F zijn EB en EF. Ze snijden elkaar in B. De poollijn van P moet dus door B gaan. Evenzoo moet die poollijn gaan door D. Het is dus de diagonaal BD. Verder moet BD gaan door het snijpunt S van EH en FK. Op dezelfde wijze toont men aan, dat de diagonaal AC door S moet gaan.

§ **204. Eigenschap. De anharmonische verhouding van de punten, waarin vier vaste raaklijnen aan een cirkel gesneden worden door elke andere raaklijn aan denzelfden cirkel, is constant (Steiner)** (fig. 107).

Bewijs.

Indien *a*, *b*, *c* en *d* de vaste raakpunten zijn en *p* het punt, waarin de veranderlijke raaklijn is getrokken, dan moet bewezen

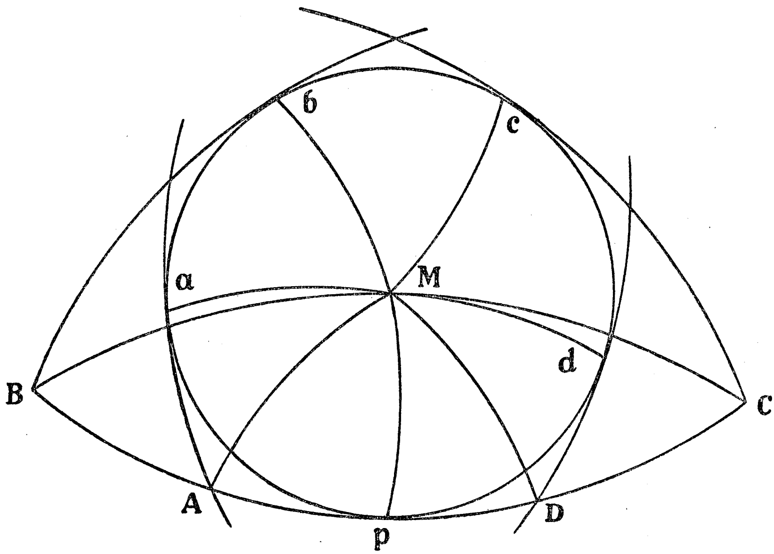


Fig. 107.

worden, dat de dubbelverhouding (ACBD) constant is. Verbinden wij het spherisch middelpunt M met *a*, *b*, *c* en *d*, A, B, C, D en *p* dan hebben wij, als we nog stellen:

$$\angle\ a\mathrm{M}p = 2m \text{ en } \angle\ d\mathrm{M}p = 2n;$$

$$\angle\ a\mathrm{M}b = \varphi,\ \angle\ b\mathrm{M}c = \varphi_1 \text{ en } \angle\ c\mathrm{M}d = \varphi_2:$$

$$\angle\ \mathrm{BM}p = \frac{\varphi + 2m}{2},\ \angle\ \mathrm{AMB} = \frac{\varphi}{2}.$$

$$\angle\ \mathrm{CMD} = \frac{\varphi_2}{2}.$$

$$\angle\ \mathrm{AMD} = \left(\frac{360^\circ - \varphi - \varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 180^\circ - \left(\frac{\varphi + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

$$\angle\ \mathrm{CMB} = 180^\circ - \left(\frac{\varphi + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi_2}{2} = 180^\circ - \frac{\varphi_1}{2}.$$

Wij hebben dus:

$$\frac{\sin AMB}{\sin AMD} : \frac{\sin CMB}{\sin CMD} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\varphi_1+\varphi_2}{2}} : \frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_2}{2}} =$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\frac{\varphi+\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}$$

d.i. constant. Hiermede is het gestelde bewezen.

§ 205. **Eigenschap. De hoogtelijnen van een boldriehoek zijn de bissectrices van zijn voetpuntendriehoek.** (Zie § 106).

Bewijs.

De bogen FE, FC, FD en FB vormen een harmonischen stralenbundel. Twee verwante stralen FC en FB staan rechthoekig op elkaar. Dus $\angle$ EFC $=$ $\angle$ DFC.

XIV. DE SPHERISCHE ELLIPS, HYPERBOOL EN PARABOOL.

§ **206**. Zij O het spherisch middelpunt van een kleinen cirkel en tevens het snijpunt van twee elkaar rechthoekig snijdende groote cirkels OX en OY. Laten wij uit een willekeurig punt P van den cirkel de loodlijn PA neer op OX en stellen wij $OA = x$, $PA = y$ en $OP = r$, dan geldt voor den cirkel:

$$\cos POA = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} r}, \quad \sin POA = \frac{\sin y}{\sin r}$$

(Fig. 108).

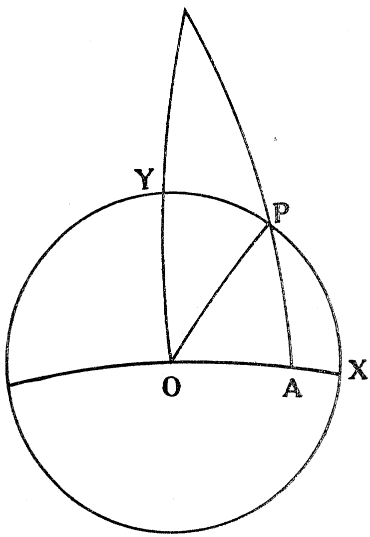


Fig. 108.

De vergelijking wordt

$$\left(\frac{\sin y}{\sin r}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} r}\right)^2 = 1.$$

Ook hebben wij:

$$\cos x \cos y = \cos r$$

$$(1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 y) = 1 - \sin^2 r$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y - \sin^2 x \sin^2 y = \sin^2 r$$

$$\left(\frac{\sin x}{\sin r}\right)^2 + \left(\frac{\sin y}{\sin r}\right)^2 = \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{\sin^2 r} + 1.$$

§ **207. Vraagstuk.** De meetkundige plaats te bepalen van alle punten op een boloppervlak, waarvoor de som der spherische afstanden tot twee vaste punten op dat oppervlak constant is. (Fig. 109).

Oplossing.

Wij kiezen het midden O tusschen de vaste punten F en F_1, als oorsprong en de X-as langs FF_1 Zij nu P een punt der meetkundige plaats en stellen wij $PF = v$, $PF = v_1$, $v + v_1 = 2a$, en als

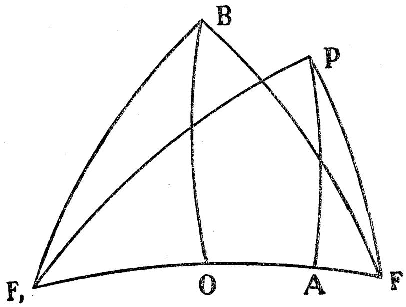


Fig. 109.

A het voetpunt is der loodlijn uit P op OX neergelaten, $F_1A = e + x$ en $FA = e - x$.

$$\cos(v + v_1) = \cos 2a.$$

$$\cos v \cos v_1 - \cos 2a = \sin v \sin v_1.$$

$$\cos^2 v \cos^2 v_1 - 2\cos v \cos v_1 \cos 2a + \cos^2 2a = (1 - \cos^2 v)(1 - \cos^2 v_1);$$

$$-2\cos v \cos v_1 \cos 2a = 1 - \cos^2 v - \cos^2 v_1 - \cos^2 2a;$$

$$-2\cos^2 y(\cos^2 e \cos^2 x - \sin^2 e \sin^2 x)\cos 2a = 1 - \cos^2 2a - 2\cos^2 y(\cos^2 e \cos^2 x + \sin^2 e \sin^2 x).$$

$$-2\cos^2 y(1 - \sin^2 e - \sin^2 x)\cos 2a = 1 - \cos^2 2a - 2\cos^2 y(1 - \sin^2 e \sin^2 x + 2\sin^2 e \sin^2 x).$$

$$2\cos^2 y(1 - \sin^2 e - \sin^2 x)(1 - \cos 2a) = 1 - \cos^2 2a - 4\cos^2 y \sin^2 e \sin^2 x.$$

$$1 - \sin^2 e - \sin^2 x = \frac{1 + \cos 2a}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 y) - \frac{2\sin^2 e \sin^2 x}{1 - \cos 2a}.$$

$$1 - \sin^2 e - \sin^2 x = \cos^2 a + \cos^2 a \operatorname{tg}^2 y - \frac{\sin^2 e \sin^2 x}{\sin^2 a}.$$

$$\sin^2 a - \sin^2 e = \frac{\sin^2 x(\sin^2 a - \sin^2 e)}{\sin^2 a} + \cos^2 a \operatorname{tg}^2 y.$$

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} y \cos a}{\sqrt{(\sin^2 a - \sin^2 e)}}\right)^2 = 1.$$

Stellen wij nog:

$$\cos b = \frac{\cos a}{\cos e} \text{ of } \operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{(\cos^2 e - \cos^2 a)}}{\cos a} = \frac{\sqrt{(\sin^2 a - \sin^2 e)}}{\cos a}$$

dan wordt de vergelijking:

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} b}\right)^2 = 1.$$

Hierin is b de hoogte van den gelijkbeenigen driehoek FF_1B als $BF = BF_1 = a$.

Aan deze kromme lijn van dubbele kromming heeft men den naam **spherische ellips** gegeven.

§ **208**. **Vraagstuk.** De meetkundige plaats te bepalen van alle punten op een boloppervlak, waarvoor het verschil der afstanden tot twee vaste punten op dat oppervlak constant is.

Oplossing.

Als in het voorgaande vraagstuk komen we tot de vergelijking:

$$\sin^2 e - \sin^2 a = \frac{\sin^2 x(\sin^2 e - \sin^2 a)}{\sin^2 a} - \cos^2 a \operatorname{tg}^2 y.$$

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{tg} y \cos a}{\sqrt{\sin^2 e - \sin^2 a}}\right)^2 = 1.$$

Stellen we:

$$\cos b = \frac{\cos e}{\cos a} \text{ of } \operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{(\cos^2 a - \cos^2 e)}}{\cos a} = \frac{\sqrt{(\sin^2 e - \sin^2 a)}}{\cos a}$$

dan vinden wij:

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} b}\right)^2 = 1,$$ dit is de **spherische hyperbool.**

§ **209. Vraagstuk.** De meetkundige plaats te bepalen van alle punten op een bolopppervlak, waarvoor de afstand tot een vast punt gelijk is aan den afstand tot een grooten cirkel (Fig. 110).

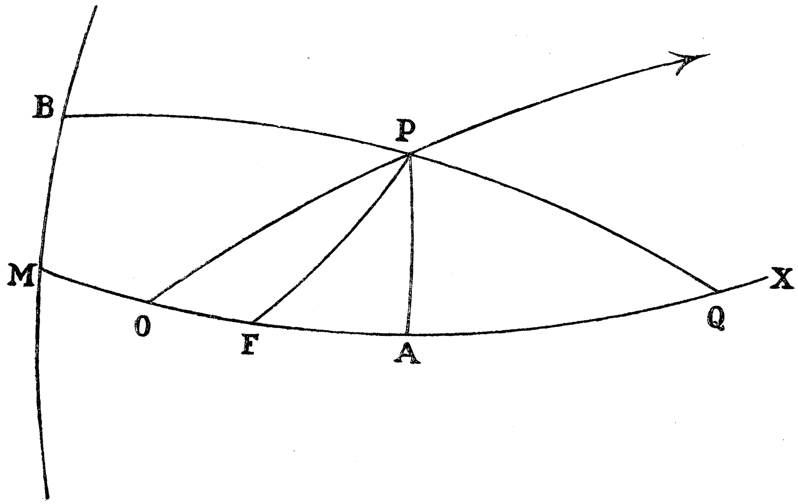


Fig. 110.

Oplossing.

Zij MB de groote cirkel, F het vaste punt, P een punt der meetkundige plaats, FM de loodlijn uit F op den grooten cirkel en PA de loodlijn op de Xas, die wij langs FM kiezen met den oorsprong in O, het midden van FM. Zij nog $OA = x$, $PA = y$, $OM = OF = e$, dan hebben wij:

$$PF = PB$$

$$\cos PF = \cos y \cos (x - e)$$

$$\cos PQ = \sin PB = \sin PF = \cos y \sin (e + x)$$

$$1 = \cos^2 PF + \sin^2 PF = \cos^2 y \, [\cos^2 (x - e) + \sin^2 (e + x)]$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = \cos^2 (x - e) + \sin^2 (e + x)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + 4 \sin x \cos x \sin e \cos e$$

$$\operatorname{tg}^2 y = \sin 2e \sin 2x,$$ dit is de **spherische parabool.**

§ 210. GEMENGDE VRAAGSTUKKEN.

1. Bewijs de volgende formules.

a. $\cos(s - a) = \dfrac{1 - \cos A + \cos B + \cos C}{4 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$.

b. $\sin(S - A) = \dfrac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}$.

c. $\cot s = \dfrac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\sin a \sin B \sin C}$.

d. $\operatorname{tg} S = - \dfrac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{\sin A \sin b \sin c}$.

e. $\cos A \sin(S - B) + \sin A \cos(S - B) \cos b =$
$\cos B \sin(S - A) + \sin B \cos(S - A) \cos a.$

f. $\cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B = \dfrac{\cot \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c + \cot \frac{1}{2} c \cot \frac{1}{2} a + \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b - 1}{\cot \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c + \cot \frac{1}{2} c \cot \frac{1}{2} a - \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + 1}$.

g. Druk

$$\frac{\cos S \cos(S - A) + \cos(S - B) \cos(S - C)}{-\cos S \cos(S - A) + \cos(S - B) \cos(S - C)}$$

zoo eenvoudig mogelijk in de zijden uit.

2. Als van een boldriehoek

a. c en $A - B$ constant zijn, dan gaat de bissectrix van hoek C door een vast punt.

b. c en $A + B$ constant zijn, dan gaat de buitenbissectrix van hoek C door een vast punt.

3. Als m'_a, m'_b, m'_c, de medianen van den pooldriehoek zijn, dan is

$$\cos m'_a, = - \frac{\sin(b+c)}{\sin a} \sin \tfrac{1}{2} A, \cos m'_b, = \ldots., \cos m'_c, = \ldots.$$

4. Op boog AB als schuine zijde staan aan denzelfden kant twee rechthoekige boldriehoeken ABC en ABD. De verlengden van AD en BC snijden elkaar in E. Bewijs, dat

$$\operatorname{tg} EA \operatorname{tg} ED = \operatorname{tg} EC \operatorname{tg} EB.$$

5. Op een bol liggen een gelijkzijdige boldriehoek ABC (zijde $= a$) en een punt P; Q, R en S zijn resp. de middens van AB, AC en BC. Men verbindt P door bogen van groote cirkels met A, B, C, Q, R en S. Bewijs, dat

$$\frac{\cos PA + \cos PB + \cos PC}{\cos PQ + \cos PR + \cos PS} = \cos \tfrac{1}{2}a \text{ is.}$$

6. In boldriehoek ABC is Z het mediaanpunt. Uit Z als pool beschrijft men een cirkel op den bol. Bewijs, dat voor elk punt P van dezen cirkelomtrek $\cos PA + \cos PB + \cos PC$ constant is.

7. In den boldriehoek ABC zijn AD, BE en CF hoogtelijnen, die elkaar in H snijden. $A_1B_1C_1$ is de pooldriehoek van ABC, $D_1E_1F_1$ die van DEF. Bewijs:

   1e dat A_1, B_1 en C_1 op de middens der zijden van boldriehoek $D_1E_1F_1$ liggen.

   2e dat H de pool van den om driehoek $D_1E_1F_1$ beschreven cirkel is.

8. De hoogtelijnen AD, BE en CF van boldriehoek ABC snijden elkaar in H. Men trekt $AK \perp EF$, $BL \perp FD$ en $CG \perp DE$. Bewijs, dat AK, BL en CG isogonaal verwant zijn met de hoogtelijnen. Als H_1 het snijpunt is van AK, BL en CG, en x_1, x_2, x_3 de spherische afstanden zijn van H_1 tot BC, CA en AB, bewijs dan, dat

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \cos A : \cos B : \cos C.$$

9. D, E en F zijn de middens der zijden BC, CA en AB van boldriehoek ABC. Bewijs, dat de medianen uit A, B en C in de driehoeken AEF, BFD en CDE door één punt gaan. Als x_1, x_2, x_3 de spherische afstanden van dit punt tot de zijden a, b, en c zijn, dan is

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}a} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}b} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}c}.$$

10. AD, BE en CF zijn hoogtelijnen van ABC. Bewijs, dat de medianen uit A, B en C in de driehoeken AEF, BFD en CDE door één punt gaan, en dat voor dit punt:

$$\sin x_1 : \sin x_2 : \sin x_3 = \cot h_a : \cot h_b : \cot h_c.$$

11. De mediaan CD van boldriehoek ABC maakt met CB den hoek $BCD = \varphi$. Bewijs, dat

$$\cot \varphi - \cot (C - \varphi) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{2n} \text{ is.}$$

12. Als α, β, γ de hoeken van den koordedriehoek ABC zijn, dan is

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{4 \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c} = \cos \tfrac{1}{2}a \sin (S - A) =$$

$$= \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c + \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c \cos A.$$

Bewijs dit, en toon aan, dat α gelijk is aan den boog, die in den nevendriehoek A'BC de middens van A'B en A'C verbindt. (Vergelijk § 26).

13. Bewijs, dat de normale coördinaten van het mediaanpunt Z van boldriehoek ABC voldoen aan de betrekking

$$\frac{\sin x_1}{\sin h_a} = \frac{\sin x_2}{\sin h_b} = \frac{\sin x_3}{\sin h_c} = \frac{1}{\cos \mathrm{ZA} + \cos \mathrm{ZB} + \cos \mathrm{ZC}}.$$ (§ 101 en § 117)

14. Bewijs, dat de normale coördinaten van het symmediaanpunt K van boldriehoek ABC voldoen aan de betrekking

$$\frac{\sin x_1}{\sin a} = \frac{\sin x_2}{\sin b} = \frac{\sin x_3}{\sin c} = \frac{2n}{\sin^2 a \cos \mathrm{KA} + \sin^2 b \cos \mathrm{KB} + \sin^2 c \cos \mathrm{KC}}.$$

(§ 101 en § 117).

15. D, E en F zijn de middens der zijden BC, CA en AB van driehoek ABC. DE en CF snijden elkaar in P, EF en AD snijden elkaar in Q. Bewijs, dat PQ gaat door de snijpunten der groote cirkels AC en DF. (§ 108).

16. De middens der zijden BC, CA en AB van driehoek ABC zijn D, E en F. Als $2n_a$, $2n_b$, $2n_c$ de sinussen der driehoeken AFE, BDF, CED zijn, dan is

$$n_a : n_b : n_c = \cos \tfrac{1}{2}a : \cos \tfrac{1}{2}b : \cos \tfrac{1}{2}c.$$

17. Een boldriehoek wordt door zijn medianen in zes driehoeken verdeeld, waarvan de sinussen even groot zijn. Bewijs dat. (§ 117). Welke is de overeenkomstige stelling der vlakke meetkunde?

18. Op een bol teekent men twee concentrische kleine cirkels. Men verbindt een veranderlijk punt P van den eenen cirkel met de uiteinden eener spherische middellijn QR van den tweeden cirkel. Bewijs, dat $\cos \mathrm{PQ} + \cos \mathrm{PR}$ constant is.

19. Van een boldriehoek ABC is $a = 120°$. Bewijs, dat de mediaan uit C die uit A halveert.

20. Bewijs, dat de som van de cotangenten van drie niet opeenvolgende stukken, waarin de binnen-bissectrices van een boldriehoek de overstaande zijden verdeelen, gelijk is aan de som van de cotangenten der drie andere stukken.

21. De bissectrices der hoeken A en C van boldriehoek ABC snijden elkaar in D. Bewijs, dat

$$\cos \mathrm{ADC} = \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B} - \cos^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \cos^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{C}}{2 \cos \tfrac{1}{2}\mathrm{A} \cos \tfrac{1}{2}\mathrm{C}}.$$

22. Van een boldriehoek zijn gegeven hoek C en de stukken p en q, waarin de zijde a verdeeld wordt door de bissectrix van hoek A. Geef formules ter berekening van de onbekende zijden en hoeken. Toepassen op $\mathrm{C} = 60°$, $p = 45°$, $q = 30°$.

23. Als van een boldriehoek
$$\cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c = 0 \text{ is,}$$
dan is $a = b = 90°$. Bewijs dit.
$$\left(\cos^2 h_c = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 c}\right).$$

24. Een gelijkbeenige boldriehoek ADE (AD = AE) heeft dezelfde basis a en dezelfde oppervlakte als een gegeven boldriehoek ABC. Druk een been van boldriehoek ADE uit in de zijden van boldriehoek ABC.

25. Op de zijden van een boltweehoek AA′ past men gelijke stukken AC en AB af, waardoor ontstaan de gelijkbeenige boldriehoeken ABC en A′BC. Opdat de oppervlakken dezer boldriehoeken zich zullen verhouden als $1 : p$, moet AB gelijk zijn aan $\mathit{arc} \cos \left\{\cot \tfrac{1}{2} \mathrm{A} \operatorname{tg} \left(\frac{p-1}{p+1}\right) \frac{\mathrm{A}}{2}\right\}$.

26. Als de groote cirkel CC′ de oppervlakte van boldriehoek ABC halveert, dan is
$$\cot \tfrac{1}{2} b \cot \tfrac{1}{2} \mathrm{AC'} \sin \mathrm{B} - \cot \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{1}{2} \mathrm{BC'} \sin \mathrm{A} = \sin (\mathrm{A} - \mathrm{B}).$$

27. Als de oppervlakte van een gelijkzijdigen boldriehoek het $\frac{1}{n}$ deel van het bolopppervlak is, dan is de zijde van dien driehoek gelijk aan
$$\mathit{arc} \cos \left\{\frac{\cos \frac{n+4}{3n} \pi}{1 - \cos \frac{n+4}{3n} \pi}\right\},$$
en de straal van den omgeschreven cirkel is
$$\mathit{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\left(1 - 2 \cos \frac{n+4}{3n} \pi\right)}}{\cos \frac{n+4}{6n} \pi}.$$

28. Van een rechthoekigen boldriehoek ABC is $a + b + c = \frac{\pi}{2}$. Bewijs, dat de minimumwaarde van de schuine zijde gelijk is aan $\mathit{arc} \cos \frac{4}{5}$, en dat in dit geval het spherisch exces gelijk is aan $\mathit{arc} \sin \frac{1}{9}$.

29. Van een gelijkbeenigen boldriehoek is $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 60°$, $\mathrm{C} = 120°$. Men trekt CD $\perp$ AB en construeert cirkels in de driehoeken ACD en BCD. Bereken de lengte van den verbindingsboog van de polen dezer cirkels.

30. Als I_1, I_2, I_3 de polen der aangeschreven cirkels van boldriehoek ABC zijn, en $\angle I_2I_1I_3 = \alpha$, $\angle I_1I_2I_3 = \beta$. $\angle I_2I_3I_1 = \gamma$, dan is

$$\frac{\sin \frac{1}{2} A}{\cos \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} B}{\cos \beta} = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\cos \gamma} = \sec s.$$

31. Als

$$(\cos a + \cos b + \cos c - 1)^2 = 4 \cos a \cos b \cos c \text{ is,}$$

dan is de straal van den omgeschreven cirkel 45°.

32. Als

$$(\cos A + \cos B + \cos C + 1)^2 + 4 \cos A \cos B \cos C = o \text{ is,}$$

dan is de straal van den ingeschreven cirkel 45°.

33. Op een bol ligt een kleine cirkel met straal R. Wat is de kleinste hoek, dien twee spherische raaklijnen aan dien cirkel met elkaar kunnen maken?

34. Van een boldriehoek ABC zijn A'BC, AB'C, ABC' de nevendriehoeken. Om die nevendriehoeken beschrijft men cirkels, en trekt in A', B', C' raaklijnen aan die cirkels, die de zijden BC, CA en AB in P, Q en R snijden. Bewijs, dat P, Q en R op een grooten cirkel liggen.

35. M is de pool van den omgeschreven cirkel van driehoek ABC. Bewijs, dat

$$\cos \tfrac{1}{2} AMB = \frac{1 - \cos a - \cos b + \cos c}{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b} \text{ is.}$$

36. I is de pool van den ingeschreven cirkel van driehoek ABC, I_1, I_2 en I_3 die der aangeschreven cirkels. Bewijs dat

a. $\operatorname{tg} II_1 : \operatorname{tg} II_2 : \operatorname{tg} II_3 = \cot AI : \cot BI : \cot CI.$

b. $\dfrac{\cot \frac{1}{2} A}{\cos AI} + \dfrac{\cot \frac{1}{2} B}{\cos BI} + \dfrac{\cot \frac{1}{2} C}{\cos CI} = \dfrac{\cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C}{\cos AI \cos BI \cos CI}.$

37. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt BC, CA en AB in D, E en F. Bewijs, dat

$$\sin a \cos AD + \sin b \cos BE + \sin c \cos CF = 2 \sin s (1 - 2 \operatorname{tg}^2 r).$$

38. Uit een punt P van de basis AB van een gelijkbeenigen boldriehoek ABC laat men loodlijnen x en y op de beenen neer; h is de hoogtelijn op een been. Bewijs, dat

$$\sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y \cos c = \sin^2 h.$$

39. Van een regelmatigen bol-n-hoek. waarvan R de spherische straal is, zijn a_1, a_2, ... a_{n-1} alle zijden en diagonalen uit één hoekpunt getrokken. Bewijs, dat

$$\sin \tfrac{1}{2} a_1 \sin \tfrac{1}{2} a_2 \; . \; . \; . \; . \; \sin \tfrac{1}{2} a_{n-1} = \frac{n}{2^{n-1}} \sin^{n-1} R \text{ is.}$$

40. Van een bolvierhoek ABCD is $B = D = 90°$. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in E. De groote cirkel door E, loodrecht op AC, snijdt AB en CD, of hun verlengden in G en F. Men vraagt te bewijzen, dat GF in E gehalveerd wordt.

41. Van een regelmatigen boltienhoek ABCDE . . . . is $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$. Bewijs, dat
1e $\sin^2 36° \cos a - \sin^2 18° \cos b = \frac{1}{4}$.
2e $\cos^2 36° \cos a - \sin^2 18° \cos c = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

42. Van een regelmatigen bolvijfhoek is elke zijde 36°. Bewijs:
a. dat de diagonaal gelijk is aan 60°.
b. dat de zijde van den kleineren regelmatigen vijfhoek, ingesloten door de diagonalen van den eersten, gelijk is aan

$$\mathit{arc}\cos\frac{1+3\sqrt{5}}{8}.$$

43. ABCD is een bolkoordenvierhoek beschreven in een kleinen cirkel, waarvan M de pool is. Men bepaalt van elke zijde die pool, welke op de zelfde bolhelft ligt als de overstaande zijde. Aldus ontstaan vier polen P, Q, R en S. Bewijs, dat PQRS een bolraaklijnenvierhoek is, waarvan de straal van den ingeschreven cirkel het complement van den straal van den omgeschreven cirkel van vierhoek ABCD is.

44. $AB'C$ en ABC' zijn nevendriehoeken, $AB'C'$ is een topdriehoek van boldriehoek ABC. M_1, M_2, M_3 en M_4 zijn resp. de polen der omgeschreven cirkels der driehoeken ABC, $AB'C$, $AB'C'$, ABC'. Door een willekeurig punt van den straal AM_1 brengt men een grooten cirkel, die AB in F en AC in E snijdt. G is een punt op AB' zoo, dat $EG \perp AM_2$; H is een punt op AC' zoo, dat $GH \perp AM_3$. Bewijs dat $HF \perp AM_4$ staat.

45. Als E_1, E_2, E_3 de spherische excessen der nevendriehoeken $A'BC$, $AB'C$ en ABC' zijn, dan is

$$\mathit{arc}\cos(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}E_1) + \mathit{arc}\cos(\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}E_2) + \mathit{arc}\cos(\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}E_3) = \pi.$$

46. Twee groote cirkels raken een kleinen cirkel, waarvan O de pool is, in de uiteinden van een spherische middellijn. Een veranderlijke groote cirkel raakt den kleinen, en snijdt de groote cirkels in A en B. Bewijs, dat OA en OB loodrecht op elkaar staan.

47. Uit twee gegeven punten A en B laat men loodlijnen $AC = a$ en $BD = b$ op een gegeven grooten cirkel neer. Construeer op

dezen grooten cirkel een punt M zoo, dat $\cos \mathrm{CM} : \cos \mathrm{DM} = \cos a : \cos b$.

48. ABCD is een bolvierhoek, waaraan de zijden AB en DC elkaar in P, AD en BC elkaar in Q snijden. Bewijs, dat de verhouding van de sinussen der spherische loodlijnen, uit P op de diagonalen neergelaten, gelijk is aan die van de sinussen der spherische loodlijnen uit Q op de diagonalen neergelaten.

49. Uit een punt P trekt men twee spherische raaklijnen PA en PB aan twee gegeven kleine cirkels M en N. Als $\sin \frac{1}{2}\,\mathrm{PA} : \sin \frac{1}{2}\,\mathrm{PB}$ constant is, dan is de m.p. van P een kleine cirkel, coaxaal met M en N.

50. Als a, b, c en d zijden van een bolkoordenvierhoek zijn, en E het spherisch exces is, dan is

$$\cos \tfrac{1}{2}\mathrm{E} = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + \cos d - 4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}d}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}$$

Bewijs dit. Waarin gaat deze formule over voor $d = 0$?

51. Construeer een cirkel, die
   a. twee gegeven kleine cirkels raakt en door een gegeven punt gaat.
   b. drie gegeven kleine cirkels raakt.

52. P is een pool van den grooten cirkel, die door de polen van de drie cirkels van Apollonius van boldriehoek ABC gaat. Bewijs, dat

$$\cos \mathrm{PA} : \cos \mathrm{PB} : \cos \mathrm{PC} = \operatorname{cosec}^2 \tfrac{1}{2}a : \operatorname{cosec}^2 \tfrac{1}{2}b : \operatorname{cosec}^2 \tfrac{1}{2}c.$$

53. M is de pool van den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABC. Het verlengde van CM snijdt AB in F. Bewijs, dat

$$\cot \mathrm{CF} - \cot \mathrm{R} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c \operatorname{tg}(\mathrm{S} - \mathrm{C}) \sin \mathrm{C}}{2 \cos s}.$$

54. Als a, b, c, d de zijden van een bolvierhoek, f en g de diagonalen zijn, en φ de hoek der diagonalen is, dan is

$$\cos \varphi = \frac{\cos a \cos c - \cos b \cos d}{\sin f \sin g}.$$

Leidt hieruit, af, dat in het platte vlak

$$\cos \varphi = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2fg} \text{ is.}$$

55. Als ρ_1 de spherische straal van een der cirkels van Apollonius is, dan is

$$\operatorname{tg} \rho_1 = \frac{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\cos b - \cos a}.$$

Leidt hieruit de overeenkomstige formule voor het platte vlak af.

56. Als M, I en I_1 de polen van de om-, in- en van een der aangeschreven cirkels zijn, dan is

$$\sin^2 MI = \sin^2 (R - r) - \cos^2 R \sin^2 r.$$
$$\sin^2 MI_1 = \sin^2 (R + r_1) - \cos^2 R \sin^2 r_1.$$

Leidt hieruit de overeenkomstige formules voor het platte vlak af.

57. Transformeer de formule

$$\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{tg} r} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}.$$

in het platte vlak.

58. Als ρ_1, ρ_2, ρ_3 de stralen der cirkels van Apollonius zijn, dan is

$$\cot \rho_1 + \cot \rho_2 + \cot \rho_3 = o,$$

59. Als I, I_1, I_2, I_3 de polen der in- en aangeschreven cirkels zijn, dan is

$$\frac{\cos II_1}{\sin r_1} + \frac{\cos II_2}{\sin r_2} + \frac{\cos II_3}{\sin r_3} = \frac{1}{\sin r}.$$

60. A, B en P zijn drie vaste punten op een grooten cirkel. Door A en B brengt men veranderlijke kleine cirkels, die de spherische middelloodlijn van AB in C snijden. De groote cirkel PC snijdt den kleinen in D. Bepaal de m.p. van D.

61. Van een boldriehoek OAB is de hoek O recht en de schuine zijde AB gelijk c. Door A wordt een boog loodrecht op OA, door B een boog loodrecht op OB getrokken. Die bogen snijden elkaar in twee diametraal gelegen punten P en P′. Wanneer de schuine zijde AB (met behoud van lengte) zich verplaatst met A langs OA en B langs OB, vraagt men de vergelijking te bepalen van de meetkundige plaats van P, d.w.z. de betrekking tusschen de bogen $OA = x$ en $AP = y$.

(Acte Ex. Wisk. K_1, 1913).

62. De spherische afstanden van een punt op den omgeschreven cirkel van boldriehoek ABC tot de zijden BC, CA en AB zijn x_1, x_2 en x_3. Bewijs, dat

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{\sin x_1} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}b}{\sin x_2} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\sin x_3} = o \text{ is.}$$

63. Als a, b, c de zijden zijn van een boldriehoek heeft men:

$$-\tfrac{3}{2} < \cos a + \cos b + \cos c < 3.$$

(Visschers Mathesis 1911).

64. Als AA_1, BB_1 en CC_1 de binnenbissectrices zijn van boldriehoek ABC en men laat uit een willekeurig punt M van B_1C_1

de loodlijnen MA_2, MB_2 neer op de zijden CB, AC en AB, dan heeft men:

$$\sin MA_2 = \sin MB_2 + \sin MC_2.$$

(Visschers, Mathesis 1911).

65. Is ABC een boldriehoek, rechthoekig in A en D een willekeurig punt der schuine zijde, dan is:

$$\sin^2 b \sin^2 BD + \sin^2 c \sin^2 CD = \sin^2 a \sin^2 AD.$$

(Visschers. Mathesis 1911).

66. Van een kleinen cirkel op den bol is I de pool, r de straal. Van alle rechthoekige driehoeken ABC in dezen cirkel beschreven gaat de schuine zijde door een vast punt op den straal AI, als het hoekpunt A van den rechten hoek vast blijft.

(Visschers. Mathesis 1911.)

67. Als in een boldriehoek ABC de hoek A gelijk is aan 2 maal hoek B, bewijs dan de gelijkheid tusschen de zijden:

$$\cos a = \cos (b + \tfrac{1}{2}c) : \cos \tfrac{1}{2}c$$

(Visschers. Mathesis 1911).

68. Naarmate in boldriehoek ABC hoek $C = 90^\circ$ of $A - B = 90^\circ$, heeft men:

$$2 \sin^{\pm 2} \tfrac{1}{2}c = \sin^{\pm 2} \tfrac{1}{2}(a + b) + \sin^{\pm 2} \tfrac{1}{2}(a - b).$$

(Visschers. Mathesis 1912).

69. Als een transversaal een kleinen cirkel snijdt in P en P_1 en de zijden van een ingeschreven vierhoek AB, BC, CD en DA in M, N, M_1 en N_1 dan heeft men:

$$\frac{\sin PM \sin PM_1}{\sin PN \sin PN_1} = \frac{\sin P_1M \sin P_1M_1}{\sin P_1N \sin P_1N_1}.$$

(Visschers. Mathesis 1914).

70. Bij een vierhoek beschreven om een kleinen cirkel staat het product van de sinussen der afstanden van twee overstaande hoekpunten tot een willekeurige raaklijn aan den cirkel, tot het product van de sinussen der afstanden van de twee andere overstaande hoekpunten tot diezelfde raaklijn, in een constante verhouding.

(Visschers. Mathesis 1914).

INDEX.

(De getallen verwijzen naar de paragrafen).

LIJST VAN FORMULES.

Opp. boldriehoek : opp. bol $= E : 720°$ . . . . (§ 23)

Opp. bolveelhoek : opp. bol $= E : 720°$ . . . . (§ 32)

Regel van Neper voor den rechthoekigen boldriehoek . . (§ 51)

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ (Eerste cosinusregel) (§ 70)

$n = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)}$ (§ 71)

$= \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}$ . . . . . (§ 75)

$\sin A = \dfrac{2n}{\sin b \sin c}$ . . . . (§ 71)

$\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin c} = \dfrac{2n}{\sin a \sin b \sin c} = M$ . . . (§ 72, 86)

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b)$

(Tangensregel, § 73)

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}} \\ \cos \tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}} \end{aligned}\right\}$$ (Formules van Euler . § 74)

$\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

(Tweede cosinusregel, § 76)

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2}a &= \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}} \\ \cos \tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\cos (S - B) \cos (S - A)}{\sin B \sin C}} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a &= \sqrt{-\frac{\cos S \cos (S - A)}{\cos (S - B) \cos (S - C)}} \end{aligned}\right\}$$ . . . . (§ 77)

$$\left.\begin{aligned} N &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C} \\ &= \sqrt{- \cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)} \end{aligned}\right\}$$ (§ 78)

$\sin a = \dfrac{2N}{\sin B \sin C}$ . . . . (§ 78)

$\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C$ (Cotangentenregel, . § 79)

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C \\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C \\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c \\
\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c
\end{aligned}\right\}\text{(Analogieën van Neper, § 80)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} \\
\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c} \\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c} \\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}
\end{aligned}\right\}\text{Formules van Delambre, . § 81)}$$

$$\cos m_a = \frac{\cos b+\cos c}{2\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}c} \quad \ldots \quad (\S\ 102)$$

$$\operatorname{tg} b_a = \frac{2}{\sin(b+c)}\sqrt{\sin b\sin c\sin s\sin(s-a)} \quad \ldots\ldots \quad (\S\ 103)$$

$$\sin h_a = \frac{2}{\sin a}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} \quad \ldots \quad (\S\ 105)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}E = \sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c)}$$

(Formule van Lhuilier, § 121)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\S\ 122)$$

$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b$ (Voor een rechthoekigen boldriehoek, § 124)

$$\sin\tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

(Formule van Cagnoli, § 126)

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} R &= \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}} \\
&= \frac{-\cos S}{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}
\end{aligned}\right\}. \quad (\S\ 137)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} r &= \frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin s} \\
&= \frac{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}
\end{aligned}\right\} \quad (\S\ 130)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}S = \cos\frac{\pi}{m} : \sin\frac{\pi}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\S\ 179)$$

$$I = \tfrac{1}{2}abc\sqrt{\sin s\sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)} \quad \ldots \quad (\S\ 181)$$

INHOUD.